



"IN THE WORLD OF SCIENCE AND EDUCATION"

international scientific-practical journal

ALMATY, KAZAKHSTAN

ISSN: 3007-8946

15 MARCH 2026



els.education23@mail.ru



irc-els.com

**МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
«IN THE WORLD OF SCIENCE AND EDUCATION»**

**INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL
«IN THE WORLD OF SCIENCE AND EDUCATION»**



Main editor: G. Shulenbaev

Editorial colleague:

B. Kuspanova
Sh Abyhanova

International editorial board:

R. Stepanov (Russia)
T. Khushruz (Uzbekistan)
A. Azizbek (Uzbekistan)
F. Doflat (Azerbaijan)

International scientific journal «IN THE WORLD OF SCIENCE AND EDUCATION», includes reports of scientists, students, undergraduates and school teachers from different countries (Kazakhstan, Tajikistan, Azerbaijan, Russia, Uzbekistan, China, Turkey, Belarus, Kyrgyzstan, Moldova, Turkmenistan, Georgia, Bulgaria, Mongolia). The materials in the collection will be of interest to the scientific community for further integration of science and education.

Международный научный журнал «IN THE WORLD OF SCIENCE AND EDUCATION», включают доклады учёных, студентов, магистрантов и учителей школ из разных стран (Казахстан, Таджикистан, Азербайджан, Россия, Узбекистан, Китай, Турция, Беларусь, Кыргызстан, Молдавия, Туркменистан, Грузия, Болгария, Монголия). Материалы сборника будут интересны научной общественности для дальнейшей интеграции науки и образования.

15 марта 2026 г.
Almaty, Kazakhstan

<https://doi.org/10.5281/zenodo.19335651>
UOT 62.523.8 (075.10)

YÜKSƏK GƏRGİNLİKLİ VƏ YÜKSƏK TEZLİKLİ ELEKTRİK SOBALARINDA ENERJİ ÇEVRİLMƏ EFFEKTİVLİYİNİN VƏ ELEKTROMAQNİT PROSESLƏRİN MÜASİR İNNOVATİV TEXNOLOGİYALAR ƏSASINDA TƏDQIQI

CAVADOVA M.M., RƏSULOV RUZİ VAQİF OĞLU

Xülasə. Bu məqalədə yüksək gərginlikli və yüksək tezlikli elektrik sobalarında enerji çevrilmə proseslərinin səmərəliliyi, elektromaqnit hadisələrin dinamikası və son illərdə tətbiq edilən innovativ texnologiyalar kompleks şəkildə araşdırılır. Tədqiqat çərçivəsində yüksək tezlikli sahənin material daxilində istilik yaranmasına təsiri, cərəyan sıxlığının paylanma qanunauyğunluqları və səth effekti (skin-effect) kimi fiziki proseslər nəzəri və tətbiqi baxımdan təhlil olunur. Xüsusilə induksion və dielektrik qızdırma sistemlərində enerji ötürülməsinin effektivliyi, güc elektronikasının rolu və yarımkeçirici açar elementlərin (IGBT, MOSFET və s.) tətbiqi nəticəsində əldə olunan texnoloji üstünlüklər müqayisəli şəkildə qiymətləndirilir. Məqalədə yüksək gərginlikli elektrik sobalarında elektromaqnit sahələrin paylanması, istilik balansının formalaşması və istilik itkilərinin azaldılması mexanizmləri sistemli şəkildə araşdırılır. Enerji çevrilmə əmsalının yüksəldilməsi üçün rezonans rejimlərinin optimallaşdırılması, tezlik tənzimləmə sistemlərinin tətbiqi və avtomatlaşdırılmış idarəetmə bloklarının integrasiyası kimi müasir yanaşmalar əsaslandırılır. Həmçinin materialın fiziki xüsusiyyətlərinin – elektrik keçiriciliyi, maqnit keçiriciliyi və dielektrik sabitinin – istilik generasiyasına təsiri eksperimental və nəzəri aspektdə izah olunur. Yüksək tezlikli və yüksək gərginlikli sobalarda enerji səmərəliliyinin artırılması yalnız konstruktiv dəyişikliklərlə deyil, həm də rəqəmsal idarəetmə, impuls modulyasiyası və adaptiv güc tənzimlənməsi sistemlərinin tətbiqi ilə mümkündür. Müasir texnologiyaların integrasiyası enerji itkilərinin azaldılmasına, temperaturun daha dəqiq idarə olunmasına və texnoloji proseslərin keyfiyyətinin yüksəldilməsinə şərait yaradır. İnnovativ texniki həllərin tətbiqi sənaye tipli elektrik sobalarında məhsuldarlığın artırılmasına və enerji resurslarından səmərəli istifadəyə xidmət edir.

Açar sözlər: yüksək gərginlik, yüksək tezlik, elektrik sobası, induksion qızdırma, elektromaqnit sahə, enerji çevrilməsi, rezonans rejimi, güc elektronikas, enerji səmərəliliyi.

Abstract. This article presents a comprehensive investigation of energy conversion efficiency, electromagnetic processes, and recent technological innovations in high-voltage and high-frequency electric furnaces. The study analyzes the influence of high-frequency electromagnetic fields on heat generation within materials, current density distribution, and physical phenomena such as the skin effect from both theoretical and applied perspectives. Particular attention is given to induction and dielectric heating systems, evaluating the efficiency of energy transfer and the technological advantages achieved through modern power electronic components such as IGBTs and MOSFETs. The distribution of electromagnetic fields, formation of thermal balance, and mechanisms for reducing heat losses in high-voltage electric furnaces are systematically examined. Modern approaches aimed at improving energy conversion efficiency—such as resonance mode optimization, frequency control systems, and integration of automated control units—are technically substantiated. The study also considers the influence of material properties, including electrical conductivity, magnetic permeability, and dielectric constant, on heat generation processes. The research demonstrates that improving energy efficiency in high-frequency and high-voltage furnaces requires not only structural modifications but also the implementation of digital control systems, pulse modulation techniques, and adaptive power regulation methods. The integration of innovative technologies contributes to reduced energy losses, precise temperature control, and improved technological process quality. Ultimately, the application of advanced technical solutions enhances productivity and ensures more efficient utilization of energy resources in industrial electric furnace systems.

Keywords: *high voltage, high frequency, electric furnace, induction heating, electromagnetic field, energy conversion, resonance mode, power electronics, energy efficiency.*

Giriş

Müasir sənaye istehsalında yüksək temperatur tələb edən texnoloji proseslərin həyata keçirilməsi üçün elektrik sobaları geniş tətbiq olunur. Xüsusilə metallurgiya, maşınqayırma, materialşünaslıq və yarımkəçirici sənayesində yüksək gərginlikli və yüksək tezlikli elektrik sobaları yüksək məhsuldarlıq və dəqiqlik təmin edən əsas avadanlıqlardan biri hesab edilir. [1] Bu tip sobalarda istilik enerjisi birbaşa elektromaqnit proseslər vasitəsilə generasiya olunduğundan enerji çevrilmə mexanizmi ənənəvi müqavimətli qızdırma sistemlərindən fərqlənir və daha mürəkkəb fiziki proseslərə əsaslanır. Yüksək tezlikli elektrik sahəsinin material daxilində yaratdığı girdab cərəyanları və ya dielektrik itkilər istilik yaranmasının əsas mənbəyini təşkil edir. Bu proseslərdə cərəyan sıxlığının paylanması, səth effekti (skin-effect), maqnit sahəsinin intensivliyi və tezliyin qiyməti istilik generasiyasının effektivliyinə birbaşa təsir göstərir. Xüsusilə yüksək gərginlik rejimində elektromaqnit sahənin sabitliyi, izolyasiya sistemlərinin etibarlılığı və təhlükəsizlik məsələləri xüsusi əhəmiyyət daşıyır. Bu səbəbdən yüksək gərginlikli və yüksək tezlikli sobaların konstruktiv və funksional xüsusiyyətlərinin elmi əsaslarla araşdırılması aktual məsələ kimi çıxış edir. [2, s. 37–45]

Son illərdə güc elektronika sahəsində əldə edilən nailiyyətlər – IGBT və MOSFET tipli yarımkəçirici açarların tətbiqi, impuls-eni modulyasiyası (PWM), rezonans invertor texnologiyaları və rəqəmsal idarəetmə sistemləri – elektrik sobalarının texniki göstəricilərinin əhəmiyyətli dərəcədə yaxşılaşdırılmasına imkan vermişdir. Bu yeniliklər enerji çevrilmə əmsalının yüksəldilməsinə, istilik prosesinin daha dəqiq tənzimlənməsinə və enerji itkilərinin azaldılmasına şərait yaradır. Avtomatlaşdırılmış nəzarət sistemlərinin tətbiqi temperaturun real vaxt rejimində izlənilməsinə və optimal iş rejiminin təmin olunmasına imkan verir. Yüksək tezlikli və yüksək gərginlikli elektrik sobalarında baş verən elektromaqnit və istilik proseslərinin qarşılıqlı əlaqəsi mürəkkəb xarakter daşıyır və çoxsaylı fiziki parametrlərdən asılıdır. Materialın elektrik keçiriciliyi, maqnit keçiriciliyi və dielektrik xüsusiyyətləri istilik generasiyasının intensivliyini müəyyən edən əsas amillərdir. Buna görə də həm nəzəri modelləşdirmə, həm də eksperimental tədqiqatlar vasitəsilə bu parametrlərin təsirinin öyrənilməsi mühüm elmi əhəmiyyət kəsb edir. [3, s. 22–30]

Təhlil

Yüksək gərginlikli və yüksək tezlikli elektrik sobalarında baş verən proseslərin təhlili elektromaqnit sahə nəzəriyyəsi, istilik ötürülməsi və güc elektronika prinsiplərinə əsaslanır. Bu tip sobalarda enerji çevrilməsi əsasən dəyişən elektromaqnit sahəsinin təsiri altında material daxilində yaranan girdab cərəyanları və ya dielektrik itkilər hesabına həyata keçirilir. Yüksək tezlik artıqca cərəyan sıxlığı materialın səth qatında cəmlənir ki, bu da səth effekti (skin-effect) ilə izah olunur. Nəticədə istilik əsasən materialın səthində generasiya olunur və istilik keçiriciliyi hesabına daxilə yayılır. Bu prosesin intensivliyi tezlik, maqnit sahəsinin gücü və materialın elektrik keçiriciliyi ilə müəyyən edilir. Yüksək gərginlik rejimində elektromaqnit sahənin paylanması və izolyasiya sistemlərinin dayanıqlılığı xüsusi əhəmiyyət daşıyır. Gərginliyin artması dielektrik deşilmə riskini yüksəldə bilər, bu isə sobanın təhlükəsiz istismarına mənfi təsir göstərir. Bu baxımdan müasir konstruksiyalarda çoxqatlı izolyasiya materiallarının tətbiqi, sahə intensivliyinin optimallaşdırılması və impuls xarakterli qidalanma sistemləri geniş istifadə olunur. Rezonans invertor sxemlərinin tətbiqi isə enerji ötürülməsinin daha effektiv və stabil həyata keçirilməsinə imkan yaradır. [4, s. 55–62]

Enerji çevrilmə səmərəliliyinin təhlili göstərir ki, ənənəvi müqavimətli qızdırma sistemləri ilə müqayisədə yüksək tezlikli induksion sobalar daha yüksək faydalı iş əmsalına malikdir. [5] Bunun əsas səbəbi istiliyin birbaşa qızdırılan material daxilində generasiya olunması və aralıq istilik ötürmə mərhələlərinin minimallaşdırılmasıdır. İmpuls-eni modulyasiyası (PWM) və tezlik tənzimləmə mexanizmləri vasitəsilə enerji sərfiyyatı real vaxt rejimində optimallaşdırıla bilər. Bu enerji itkilərinin azalmasına və temperaturun dəqiq idarə edilməsinə şərait yaradır.

Elektromaqnit və istilik proseslərinin qarşılıqlı əlaqəsi riyazi modelləşdirmə vasitəsilə də təhlil olunur. [6] Maksvel tənlikləri əsasında sahə paylanmasının hesablanması və istilik keçiriciliyi

tənlikləri ilə birlikdə inteqrasiya olunmuş model qurulması temperatur sahəsinin zaman üzrə dəyişməsinə müəyyən etməyə imkan verir. Bu cür kompleks model yanaşması konstruktiv parametrlərin – bobin forması, nüvə materialı, tezlik intervalı və güc səviyyəsi – optimallaşdırılmasına şərait yaradır. [7] Yüksək gərginlikli və yüksək tezlikli elektrik sobalarında son texnoloji yeniliklər əsasən üç istiqamətdə cəmlənir: güc elektronikasının təkmilləşdirilməsi, rəqəmsal idarəetmə sistemlərinin tətbiqi və enerji itkilərinin azaldılması.

Cədvəl 1. Yüksək gərginlikli və yüksək tezlikli elektrik sobalarında texnoloji yeniliklərin analitik qiymətləndirilməsi

Təhlil istiqaməti	Mövcud texnologiya	İnnovativ yenilik	Texniki nəticə
Enerji çevrilməsi	Klassik induksion qızdırma	Rezonans invertor və PWM idarəetmə	Faydalı iş əmsalının artması
Elektromaqnit sahə paylanması	Sabit tezlikli sistem	Adaptiv tezlik tənzimlənməsi	Səth effektinin optimallaşdırılması
Güc elektronikasısı	Tiristor əsaslı sxem	IGBT/MOSFET əsaslı yüksək tezlikli açarlar	Enerji itkilərinin azalması
İdarəetmə sistemi	Analog nəzarət	Rəqəmsal və mikroprosessorlu idarəetmə	Temperaturun dəqiq stabilizasiyası
Enerji səmərəliliyi	Sabit güc rejimi	Adaptiv güc tənzimlənməsi	Enerji sərfiyyatının optimallaşdırılması

Mənbə: <https://www.taylorfrancis.com/books/mono/10.1201/9781315117485/handbook-induction-heating-valery-rudnev-raymond-cook-loveless>

Cədvəldə yüksək gərginlikli və yüksək tezlikli elektrik sobalarında tətbiq olunan əsas texnoloji elementlər və onların müasir innovativ həllərlə müqayisəsi sistemli şəkildə təqdim edilmişdir. Təhlil göstərir ki, klassik induksion və sabit tezlikli sistemlərlə müqayisədə rezonans invertorların və PWM əsaslı idarəetmənin tətbiqi enerji çevirmə əmsalını artırır və güc itkilərini azaldır. IGBT və MOSFET tipli yarımkeçirici açarların istifadəsi yüksək tezlik diapazonunda daha stabil və effektiv işləmə rejimi yaradır. Adaptiv tezlik və güc tənzimləmə mexanizmləri isə səth effektinin optimal səviyyədə saxlanmasına və istilik prosesinin dəqiq idarə olunmasına imkan verir. Rəqəmsal mikroprosessorlu nəzarət sistemləri temperaturun sabitliyini təmin edərək texnoloji prosesin keyfiyyətini yüksəldir.

Son illərin əsas yenilikləri enerji səmərəliliyinin artırılması, elektromaqnit proseslərin optimallaşdırılması və idarəetmə sistemlərinin rəqəmsallaşdırılması istiqamətində cəmlənmişdir. Bu nəticələr məqalənin yekun hissəsində ümumiləşdirilərək praktiki və elmi nəticələrin formalaşdırılmasına əsas yaradır. Aparılmış araşdırma və müqayisəli təhlil göstərir ki, yüksək gərginlikli və yüksək tezlikli elektrik sobalarında son texnoloji yeniliklər enerji çevirmə mexanizmlərinin təkmilləşdirilməsi və elektromaqnit proseslərin daha dəqiq idarə olunması istiqamətində mühüm irəliləyişlər təmin etmişdir. Müasir güc elektronikasısı elementlərinin – xüsusilə IGBT və MOSFET əsaslı açarların – tətbiqi yüksək tezlik rejimində daha stabil və səmərəli iş şəraiti yaratmışdır. [8, s. 18–24]

Rezonans invertor texnologiyaları və impuls-eni modulyasiyası enerji itkilərinin azalmasına, faydalı iş əmsalının yüksəlməsinə və istilik prosesinin optimallaşdırılmasına şərait yaradır. Adaptiv tezlik və güc tənzimlənməsi isə materialın fiziki xüsusiyyətlərinə uyğun dinamik idarəetmə imkanı verərək texnoloji prosesin keyfiyyətini artırır. [9] Rəqəmsal idarəetmə və avtomatlaşdırılmış monitoring sistemlərinin inteqrasiyası temperaturun real vaxt rejimində nəzarətdə saxlanmasına və təhlükəsizlik səviyyəsinin yüksəldilməsinə imkan verir. Bu isə sənaye istehsalında məhsuldarlığın artmasına və enerji resurslarından daha səmərəli istifadəyə xidmət edir. [10, s. 29–35]

Yüksək gərginlikli və yüksək tezlikli elektrik sobalarında innovativ texnologiyaların tətbiqi yalnız enerji səmərəliliyinin artırılması ilə məhdudlaşmır, həm də texnoloji proseslərin sabitliyini, təhlükəsizliyini və iqtisadi səmərəliliyini təmin edən əsas amil kimi çıxış edir. Kompleks elmi

yanışma və müasir texniki həllərin tətbiqi bu sahədə davamlı inkişafın əsas istiqamətini müəyyən edir.

ƏDƏBİYYAT SİYAHISI

1. Abbasov, A. B. (2020). *Sənaye elektrik qurğuları və yüksək tezlikli sistemlər*. Bakı: AzTU Nəşriyyatı.
2. Həsənov, E. M. (2021). Yüksək tezlikli induksion qızdırma sistemlərinin enerji səmərəliliyi. *Energetikanın problemləri*, 2(3), 37–45.
3. Məmmədov, V. R. (2022). Güc elektronikasısı elementlərinin sənaye elektrik sobalarında tətbiqi. *Energetika və avtomatika jurnalı*, 4(1), 22–30.
4. Quliyev, N. S. (2019). Elektromaqnit sahələrin istilik proseslərinə təsiri. *Azərbaycan Texniki Universitetinin Elmi Xəbərləri*, 3(2), 55–62.
5. İbrahimov, T. A. (2018). *Yüksək gərginlikli elektrik qurğularının istismarı və təhlükəsizlik məsələləri*. Bakı: Təhsil nəşriyyatı.
6. Бессонов, Л. А. (2020). *Теоретические основы электротехники*. Москва: Юрайт.
7. Кудрин, Б. И. (2019). *Электротермические установки и системы*. Москва: Академия.
8. Красник, В. В. (2021). Повышение энергоэффективности индукционных печей высокой частоты. *Промышленная энергетика*, 6, 18–24.
9. Шеховцов, В. П. (2018). *Проектирование электротермических установок*. Санкт-Петербург: Лань.
10. Федоров, А. А. (2022). Современные силовые полупроводниковые приборы в высокочастотных установках. *Энергетик*, 9, 29–35.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.19335744>
УДК 519.633

РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

ХАНКИШИЕВ ЗАКИР ФАРМАН ОГЛЫ

Доцент кафедры Уравнений математической физики Бакинского Государственного
Университета, Баку, Азербайджан

КЕРИМОВА АСЯ ХАБИЛ ГЫЗЫ

Магистрант кафедры Уравнений математической физики Бакинского Государственного
Университета, Баку, Азербайджан

Аннотация. В работе дано применение метода конечных разностей к решению одной задачи для нагруженного дифференциального уравнения гиперболического типа с граничными условиями, содержащими частные производные искомого решения по пространственной переменной. Построена соответствующая разностная задача, аппроксимирующая эту задачу со вторым порядком точности и дан метод решения этой задачи.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, уравнение гиперболического типа, аппроксимация, разностная задача, погрешность аппроксимации.

1. Постановка задачи

Пусть требуется найти непрерывную в замкнутой прямоугольной области $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ функцию $u = u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + bu(x, t) + b_1 u(x, \bar{t}_1) + b_2 u(x, \bar{t}_2) + f(x, t),$$
$$0 < x < l, 0 < t \leq T,$$

(1)

граничным условиям

$$\begin{cases} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \alpha u(0, t) = \mu_1(t), \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial t} + \beta u(l, t) = \mu_2(t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T,$$

(2)

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

(3)

Здесь $a(x, t) \geq a_0 > 0$ – непрерывная в рассматриваемой области \bar{D} функция, $b, b_1, b_2, \alpha, \beta$ – действительные числа, $\bar{t}_1, \bar{t}_2 \in (0, T]$, $f(x, t), \mu_1(t), \mu_2(t), \varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – известные непрерывные функции.

В настоящей работе к решению задачи (1)-(3) будем применять метод конечных разностей. С этой целью, сначала в замкнутой области \bar{D} определим сеточную область, затем в этой сеточной области построим разностную задачу, аппроксимирующую задачу (1)-(3) со вторым порядком точности. После этого дадим алгоритм решения построенной разностной задачи.

2. Построение разностной задачи

ОФ “Международный научно-исследовательский центр “Endless Light in Science”

Пусть $N \geq 2, j_0 \geq 2$ – натуральные числа. Разделим отрезок $x \in [0, l]$ на N , а $t \in [0, T]$ на j_0 равных частей. Точки деления этих отрезков обозначим через $x_n = nh, n = 0, 1, \dots, N$,

$$h = \frac{l}{N} \text{ и } t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0, \tau = \frac{T}{j_0}, \text{ соответственно. Число } j_0 \text{ выберем таким}$$

образом, чтобы точки \bar{t}_1 и \bar{t}_2 были среди точек $t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0$. Пусть $\bar{t}_1 = j_1\tau, \bar{t}_2 = j_2\tau$. Множество точек (x_n, t_j) обозначим через $\bar{\omega}_{h\tau}$:

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_n, t_j), n = 0, 1, 2, \dots, N, j = 0, 1, 2, \dots, j_0\}.$$

В теории разностных схем множество $\bar{\omega}_{h\tau}$ называют сеткой в области \bar{D} , а точки (x_n, t_j) – узлами этой сетки.

Рассмотрим уравнение (1) в узлах $(x_n, t_j), n = 1, 2, \dots, N - 1, j = 1, 2, \dots, j_0$, сетки $\bar{\omega}_{h\tau}$:

$$\frac{\partial^2 u(x_n, t_j)}{\partial t^2} = a(x_n, t_j) \frac{\partial^2 u(x_n, t_j)}{\partial x^2} + bu(x_n, t_j) + b_1 u(x_n, \bar{t}_1) + b_2 u(x_n, \bar{t}_2) + f(x_n, t_j),$$

$$n = 1, 2, \dots, N - 1, j = 1, 2, \dots, j_0. \quad (4)$$

Известно, что, если функция $u = u(x, t)$ имеет в области $D = \{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ ограниченные частные производные по переменным x и t до четвертого порядка

$$\frac{\partial^2 u(x_n, t_j)}{\partial t^2} = \frac{u(x_n, t_{j+1}) - 2u(x_n, t_j) + u(x_n, t_{j-1}))}{\tau^2} + O(\tau^2),$$

$$\frac{\partial^2 u(x_n, t_j)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{n+1}, t_j) - 2u(x_n, t_j) + u(x_{n-1}, t_j))}{h^2} + O(h^2).$$

С учетом этих равенств, из (4) получим справедливость равенств

$$\frac{u(x_n, t_{j+1}) - 2u(x_n, t_j) + u(x_n, t_{j-1}))}{\tau^2} = a(x_n, t_j) \frac{u(x_{n+1}, t_j) - 2u(x_n, t_j) + u(x_{n-1}, t_j))}{h^2} +$$

$$+ bu(x_n, t_j) + b_1 u(x_n, \bar{t}_1) + b_2 u(x_n, \bar{t}_2) + f(x_n, t_j) + O(h^2 + \tau^2), n = 1, 2, \dots, N - 1,$$

$$j = 1, 2, \dots, j_0 - 1.$$

(5)

Теперь рассмотрим граничные условия (2) при $t = t_j, j = 1, 2, \dots, j_0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(0, t_j)}{\partial x} + \alpha u(0, t_j) = \mu_1(t_j), \\ \frac{\partial u(l, t_j)}{\partial t} + \beta u(l, t_j) = \mu_2(t_j), \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, j_0 \quad (6)$$

Предположим, что уравнение (1) выполняется и на участках границы $x = 0$ и $x = l$ области \bar{D} .

По формуле Тейлора имеем:

$$u(x, t_j) = u(0, t_j) + x \frac{\partial u(0, t_j)}{\partial x} + \frac{x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(0, t_j)}{\partial x^2} + \frac{x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(\tilde{x}, t_j)}{\partial x^3}, \quad 0 < \tilde{x} < x.$$

Если в этом равенстве положим $x = h$, то получим справедливость равенства

$$u(h, t_j) = u(0, t_j) + h \frac{\partial u(0, t_j)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u(0, t_j)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u(\tilde{x}, t_j)}{\partial x^3},$$

или

$$\frac{u(h, t_j) - u(0, t_j)}{h} = \frac{\partial u(0, t_j)}{\partial x} + \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 u(0, t_j)}{\partial x^2} + O(h^2)$$

Учитывая здесь первое условие в (6) и то предположение, что уравнение (1) выполняется и при $x = 0$, приходим к следующему равенству:

$$\frac{u(h, t_j) - u(0, t_j)}{h} = -\alpha u(0, t_j) + \mu_1(t_j) + \frac{h}{2a(0, t_j)} \left[\frac{\partial^2 u(0, t_j)}{\partial t^2} - bu(0, t_j) - b_1 u(0, \bar{t}_1) - b_2 u(0, \bar{t}_2) - f(0, t_j) \right] + O(h^2), \quad j = 1, 2, \dots, j_0 - 1.$$

Заменив в этих равенствах производную $\frac{\partial^2 u(0, t_j)}{\partial t^2}$ соответствующим разностным выражением, получим справедливость следующих равенств:

$$\frac{u(h, t_j) - u(0, t_j)}{h} - \frac{h}{2a(0, t_j)} \frac{u(0, t_{j+1}) - 2u(0, t_j) + u(0, t_{j-1}))}{\tau^2} + \left(\alpha + \frac{bh}{2a(0, t_j)} \right) u(0, t_j) + \frac{b_1 h}{2a(0, t_j)} u(0, \bar{t}_1) + \frac{b_2 h}{2a(0, t_j)} u(0, \bar{t}_2) = \mu_1(t_j) - \frac{h}{2a(0, t_j)} f(0, t_j) + O(h^2 + \tau^2),$$

$$j = 1, 2, \dots, j_0 - 1.$$

(7)

Аналогичным образом, используя формулу Тейлора, второе граничное условие в (6), и то предположение, что уравнение (1) выполняется и на границе $x = l$ области \bar{D} , получим справедливость следующего равенства:

$$\frac{u(l, t_j) - u(l-h, t_j)}{h} + \frac{h}{2a(l, t_j)} \frac{u(l, t_{j+1}) - 2u(l, t_j) + u(l, t_{j-1}))}{\tau^2} + \left(\beta - \frac{bh}{2a(l, t_j)} \right) u(l, t_j) - \frac{b_1 h}{2a(l, t_j)} u(l, \bar{t}_1) - \frac{b_2 h}{2a(l, t_j)} u(l, \bar{t}_2) = \mu_2(t_j) + \frac{h}{2a(l, t_j)} f(l, t_j) + O(h^2 + \tau^2),$$

$$j = 1, 2, \dots, j_0 - 1.$$

(8)

Отбрасывая в равенствах (5), (7), (8) слагаемые порядка $O(h^2 + \tau^2)$ и обозначив при этом приближенные значения $u(x_n, t_j)$ через y_n^j , получим справедливость следующих равенств:

$$-\frac{h}{2a(0, t_j)} \frac{y_0^{j+1} - 2y_0^j + y_0^{j-1}}{\tau^2} + \frac{y_1^j - y_0^j}{h} + \left(\alpha + \frac{bh}{2a(0, t_j)} \right) y_0^j + \frac{b_1 h}{2a(0, t_j)} y_0^{j_1} + \frac{b_2 h}{2a(0, t_j)} y_0^{j_2} = f_0^j,$$

$$\frac{y_n^{j+1} - 2y_n^j + y_n^{j-1}}{\tau^2} - a(x_n, t_j) \frac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2} - by_n^j - b_1 y_n^{j_1} - b_2 y_n^{j_2} = f_n^j,$$

$$n = 1, 2, \dots, N - 1,$$

(9)

$$-\frac{h}{2a(l, t_j)} \frac{y_N^{j+1} - 2y_N^j + y_N^{j-1}}{\tau^2} + \frac{y_N^j - y_{N-1}^j}{h} + \left(\beta - \frac{bh}{2a(l, t_j)} \right) y_N^j - \frac{b_1 h}{2a(l, t_j)} y_N^{j_1} -$$

$$-\frac{b_2 h}{2a(l, t_j)} y_N^{j_2} = f_N^j,$$

где

$$f_0^j = \mu_1(t_j) - \frac{h}{2a(0, t_j)} f(0, t_j), \quad f_n^j = f(x_n, t_j), \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$f_n^j = \mu_2(t_j) + \frac{h}{2a(l, t_j)} f(l, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, j_0 - 1.$$

К уравнениям (9) присоединим начальные условия

$$y_n^0 = \varphi_1(x_n), \quad y_n^1 = \varphi_1(x_n) + \tau \varphi_2(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (10)$$

полученные из начальных условий (3).

Таким образом, мы построили разностную задачу (9)-(10), аппроксимирующую задачу (1)-(3) с точностью $O(h^2 + \tau^2)$.

Разностная задача (9)-(10) есть явная разностная задача (явная разностная схема). При решении прикладных задач, целесообразно использовать неявные разностные схемы. Исходя из явной разностной схемы (9)-(10), построим соответствующую неявную схему. Для этого разностные уравнения (9), сначала перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{y_0^{j+1} - 2y_0^j + y_0^{j-1}}{\tau^2} - \frac{2a(0, t_j)}{h} \frac{y_1^j - y_0^j}{h} - \left(\frac{2\alpha a(0, t_j)}{h} + b \right) y_0^j - b_1 y_0^{j_1} - b_2 y_0^{j_2} = \\ = -\frac{2a(0, t_j)}{h} f_0^j, \\ \frac{y_n^{j+1} - 2y_n^j + y_n^{j-1}}{\tau^2} - a(x_n, t_j) \frac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2} - b y_n^j - b_1 y_n^{j_1} - b_2 y_n^{j_2} = f_n^j, \\ n = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{y_N^{j+1} - 2y_N^j + y_N^{j-1}}{\tau^2} + \frac{2a(l, t_j)}{h} \frac{y_N^j - y_{N-1}^j}{h} - \left(\frac{2\alpha a(l, t_j)}{h} - b \right) y_N^j - b_1 y_N^{j_1} - b_2 y_N^{j_2} = \\ = -\frac{2a(l, t_j)}{h} f_N^j, \quad j = 1, 2, \dots, j_0 - 1. \end{aligned}$$

Пусть σ – действительный параметр. Исходя из последних разностных уравнений, рассмотрим следующие разностные уравнения, зависящие от параметра σ :

$$\begin{aligned} \frac{y_0^{j+1} - 2y_0^j + y_0^{j-1}}{\tau^2} - \frac{2a(0, t_j)}{h} \left(\sigma \frac{y_1^{j+1} - y_0^{j+1}}{h} + (1-2\sigma) \frac{y_1^j - y_0^j}{h} + \sigma \frac{y_1^{j-1} - y_0^{j-1}}{h} \right) - \\ - \left(\frac{2\alpha a(0, t_j)}{h} + b \right) \left(\sigma y_0^{j+1} + (1-2\sigma) y_0^j + \sigma y_0^{j-1} \right) - b_1 y_0^{j_1} - b_2 y_0^{j_2} = -\frac{2a(0, t_j)}{h} \bar{f}_0^j, \\ \frac{y_n^{j+1} - 2y_n^j + y_n^{j-1}}{\tau^2} - a(x_n, t_j) \Lambda \left(\sigma y_n^{j+1} + (1-2\sigma) y_n^j + \sigma y_n^{j-1} \right) - b \left(\sigma y_n^{j+1} + (1-2\sigma) y_n^j + \sigma y_n^{j-1} \right) - \\ - b_1 y_n^{j_1} - b_2 y_n^{j_2} = \bar{f}_n^j, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{y_N^{j+1} - 2y_N^j + y_N^{j-1}}{\tau^2} + \frac{2a(l, t_j)}{h} \left(\sigma \frac{y_N^{j+1} - y_N^{j-1}}{h} + (1-2\sigma) \frac{y_N^j - y_N^{j-1}}{h} + \sigma \frac{y_N^{j-1} - y_N^{j-2}}{h} \right) +$$

$$+ \left(\frac{2\beta a(l, t_j)}{h} - b \right) (\sigma y_N^{j+1} + (1-2\sigma)y_N^j + \sigma y_N^{j-1}) - b_1 y_0^{j_1} - b_2 y_0^{j_2} = \frac{2a(l, t_j)}{h} \bar{f}_N^j,$$

$j = 1, 2, \dots, j_0 - 1.$

Здесь $\Lambda y_n^j = \frac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2}$, $\bar{f}_n^j, n = 0, 1, \dots, N$, определяются через f_n^j и σ .

Очевидно, что, при $\sigma = 0$, разностные уравнения (12) совпадают с разностными уравнениями (11).

Перепишем начальные условия (10) в виде

$$y_n^0 = \varphi_1(x_n), y_n^1 = \bar{\varphi}_2(x_n), n = 0, 1, \dots, N, \quad (13)$$

где $\bar{\varphi}_2(x_n) = \varphi_1(x_n) + \tau\varphi_2(x_n), n = 0, 1, \dots, N.$

3. Решение разностной задачи (12)-(13)

Для решения разностной задачи (12), (13), перепишем разностные уравнения (12) в следующем виде:

$$c_0^j y_0^{j+1} - b_0^j y_1^{j+1} + d_0^j y_0^j - e_0^j y_1^j + c_0^j y_0^{j-1} - b_0^j y_1^{j-1} - b_1 y_0^{j_1} - b_2 y_0^{j_2} = g_0^j,$$

$$- a_n^j y_{n-1}^{j+1} + c_n^j y_n^{j+1} - a_n^j y_{n+1}^{j+1} - e_n^j y_{n-1}^j + d_n^j y_n^j - e_n^j y_{n+1}^j - a_n^j y_{n-1}^{j-1} + c_n^j y_n^{j-1} - a_n^j y_{n+1}^{j-1} -$$

$$- b_1 y_n^{j_1} - b_2 y_n^{j_2} = g_n^j, n = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$(14)$$

$$- a_N^j y_{N-1}^{j+1} + c_N^j y_N^{j+1} - e_N^j y_{N-1}^j + d_N^j y_N^j - a_N^j y_{N-1}^{j-1} + c_N^j y_N^{j-1} - b_1 y_N^{j_1} - b_2 y_N^{j_2} = g_N^j,$$

$$j = 1, 2, \dots, j_0 - 1.$$

Здесь

$$c_0^j = \frac{1}{\tau^2} + \frac{2\sigma a(0, t_j)}{h^2} (1 - \alpha h) - b\sigma, b_0^j = \frac{2\sigma a(0, t_j)}{h^2}, d_0^j = -\frac{2}{\tau^2} + \frac{2(1-2\sigma)a(0, t_j)}{h^2} (1 - \alpha h) -$$

$$- b(1-2\sigma), e_0^j = \frac{2(1-2\sigma)a(0, t_j)}{h^2}, a_n^j = \frac{\sigma a(x_n, t_j)}{h^2}, c_n^j = \frac{1}{\tau^2} + \frac{2\sigma a(x_n, t_j)}{h^2} - b\sigma,$$

$$e_n^j = \frac{(1-2\sigma)a(x_n, t_j)}{h^2}, d_n^j = -\frac{2}{\tau^2} + \frac{2(1-2\sigma)a(x_n, t_j)}{h^2} - b(1-2\sigma), n = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$a_N^j = \frac{2\sigma a(l, t_j)}{h^2}, c_N^j = \frac{1}{\tau^2} + \frac{2\sigma a(l, t_j)}{h^2} (1 + \beta h) - b\sigma, e_N^j = \frac{2(1-2\sigma)a(l, t_j)}{h^2},$$

$$d_N^j = -\frac{2}{\tau^2} + \frac{2(1-2\sigma)a(l, t_j)}{h^2} (1 + \beta h), g_0^j = -\frac{2a(0, t_j)}{h} \bar{f}_0^j, g_n^j = \bar{f}_n^j, n = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$g_N^j = \frac{2a(l, t_j)}{h} \bar{f}_N^j, j = 1, 2, \dots, j_0 - 1.$$

Таким образом, мы должны найти решение разностных уравнений (14), удовлетворяющее начальным условиям (13).

Разностную задачу (15), (13) можно записать в следующем матричном виде:

$$(15) \quad A_j y^{j+1} + C_j y^j + A_j y^{j-1} - B_1 y^{j_1} - B_2 y^{j_2} = g^j, \quad j = 1, 2, \dots, j_0 - 1,$$

$$y^0 = \varphi_1, \quad y^1 = \bar{\varphi}_2, \tag{16}$$

где

$$A_j = \begin{pmatrix} c_0^j & -b_0^j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1^j & c_1^j & -a_1^j & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2^j & c_2^j & -a_2^j & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{N-1}^j & c_{N-1}^j & -a_{N-1}^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_N^j & c_N^j \end{pmatrix},$$

$$C_j = \begin{pmatrix} d_0^j & -e_0^j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_1^j & d_1^j & -e_1^j & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e_2^j & d_2^j & -e_2^j & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -e_{N-1}^j & d_{N-1}^j & -e_{N-1}^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -e_N^j & d_N^j \end{pmatrix},$$

$$B_k = \begin{pmatrix} b_k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_k & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \quad g^j = \begin{pmatrix} g_0^j \\ g_1^j \\ \dots \\ g_{N-1}^j \\ g_N^j \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_0) \\ \varphi_1(x_1) \\ \dots \\ \varphi_1(x_{N-1}) \\ \varphi_1(x_N) \end{pmatrix}, \quad \bar{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_2(x_0) \\ \bar{\varphi}_2(x_1) \\ \dots \\ \bar{\varphi}_2(x_{N-1}) \\ \bar{\varphi}_2(x_N) \end{pmatrix}.$$

Разностные уравнения (15) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_1 y^2 + C_1 y^1 + A_1 y^0 - B_1 y^{j_1} - B_2 y^{j_2} &= g^1, \\ A_2 y^3 + C_2 y^2 + A_2 y^1 - B_1 y^{j_1} - B_2 y^{j_2} &= g^2, \\ A_3 y^4 + C_3 y^3 + A_3 y^2 - B_1 y^{j_1} - B_2 y^{j_2} &= g^3, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_{j_0-2} y^{j_0-1} + C_{j_0-2} y^{j_0-2} + A_{j_0-2} y^{j_0-3} - B_1 y^{j_1} - B_2 y^{j_2} &= g^{j_0-2}, \\ A_{j_0-1} y^{j_0} + C_{j_0-1} y^{j_0-1} + A_{j_0-1} y^{j_0-2} - B_1 y^{j_1} - B_2 y^{j_2} &= g^{j_0-1}. \end{aligned} \tag{17}$$

Последние уравнения, с учетом начальных условий (16) и того, что матрицы A_j имеют диагональные преобладания, можем привести к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 y^2 &= P_1(B_1 y^{j_1} + B_2 y^{j_2}) + Q_1, \\
 y^3 &= P_2(B_1 y^{j_1} + B_2 y^{j_2}) + Q_2, \\
 y^4 &= P_3(B_1 y^{j_1} + B_2 y^{j_2}) + Q_3, \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 y^{j_1} &= P_{j_1-1}(B_1 y^{j_1} + B_2 y^{j_2}) + Q_{j_1-1}, \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 y^{j_2} &= P_{j_2-1}(B_1 y^{j_1} + B_2 y^{j_2}) + Q_{j_2-1}, \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 y^{j_0} &= P_{j_0-1}(B_1 y^{j_1} + B_2 y^{j_2}) + Q_{j_0-1},
 \end{aligned} \tag{18}$$

где $P_j, Q_j, j = 1, 2, \dots, j_0 - 1$ – известные матрицы. Легко можно проверить, что, например, первые матрицы $P_j, Q_j, j = 1, 2, \dots$, определяются равенствами

$$P_1 = A_1^{-1}, Q_1 = -A_1^{-1}(C_1 \bar{\varphi}_2 - g^1) - \varphi_1, P_2 = A_2^{-1}(E - C_2 A_1^{-1}), Q_2 = -A_2^{-1}(C_2 Q_1 - g^2) - \bar{\varphi}_2, \dots$$

Используя равенства (18) сначала определяем $B_1 y^{j_1} + B_2 y^{j_2}$. Для этого обе части равенств, левые части которых равны y^{j_1} и y^{j_2} , умножаем слева на B_1 и B_2 . Складывая эти два равенства, получим равенство, из которого можем найти $B_1 y^{j_1} + B_2 y^{j_2}$. После этого найденное выражение для $B_1 y^{j_1} + B_2 y^{j_2}$ подставляя в правых частях равенств (18) можем найти y^2, y^3, \dots, y^{j_0} , т.е. решение задачи (15)-(16).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ханкишиев З.Ф. О решении и устойчивости одной разностной задачи для линейного нагруженного дифференциального уравнения гиперболического типа. Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2023, №1, с.44-61.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. Москва, «Наука», 1978, 592 с.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.19335828>
УДК 519.633

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

ХАНКИШИЕВ ЗАКИР ФАРМАН ОГЛЫ

Доцент кафедры Уравнений математической физики Бакинского Государственного Университета, Баку, Азербайджан

ИСАЕВ МИРВАХАБ РАМИН ОГЛЫ

Магистрант кафедры Уравнений математической физики Бакинского Государственного Университета, Баку, Азербайджан

***Аннотация.** В работе рассмотрена одна задача для уравнения гиперболического типа с интегральными условиями. Заменяя интегральных условий нелокальными граничными условиями, к решению полученной новой задачи применен метод конечных разностей. Построена соответствующая разностная задача, аппроксимирующая эту задачу со вторым порядком точности и дано решение построенной разностной задачи.*

***Ключевые слова:** Уравнение гиперболического типа, интегральные условия, разностная задача, погрешность аппроксимации, решение разностной задачи.*

1. Постановка задачи

Найти непрерывную в замкнутой области $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ функцию $u = u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + bu(x, t) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

граничным условиям

$$(2) \quad \begin{aligned} \int_0^l c_1(x)u(x, t)dx &= \mu_1(t), \\ \int_0^l c_2(x)u(x, t)dx &= \mu_2(t), \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T,$$

и начальным условиям

$$(3) \quad u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Здесь $a(x) \geq \bar{a} > 0$, $f(x, t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – известные непрерывные функции своих аргументов, b – действительное число.

Предполагается, что функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$(4) \quad \begin{cases} (a(x)c_1(x))^n = a_1c_1(x), \\ (a(x)c_2(x))^n = a_2c_2(x). \end{cases}$$

Здесь a_1 и a_2 – действительные числа.

Из последних условий следует, что функции $a(x)$, $c_1(x)$ и $c_2(x)$ – являются и дважды дифференцируемыми функциями.

Для решения задачи (1)-(4) методом конечных разностей, сначала, используя условия (4), граничные условия (2) заменим нелокальными граничными условиями [1]. После этого, к решению полученной новой задачи будем применять метод конечных разностей.

2. Приведение задачи (1) – (4) к задаче с нелокальными граничными условиями

Рассмотрим сначала первое интегральное условие в (2) и продифференцируем обе части этого условия два раза по переменной t :

$$\int_0^l c_1(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx = \mu_1''(t).$$

Отсюда, с учетом уравнения (1), получим:

$$\int_0^l c_1(x) \left(a(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + bu(x,t) + f(x,t) \right) dx = \mu_1''(t)$$

или

$$\int_0^l c_1(x) a(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx + b \int_0^l c_1(x) u(x,t) dx + \int_0^l c_1(x) f(x,t) dx = \mu_1''(t)$$

или

$$\int_0^l c_1(x) a(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = \mu_1''(t) - b \mu_1(t) - \int_0^l c_1(x) f(x,t) dx. \quad (5)$$

Рассмотрим интеграл в левой части этого равенства и применим к этому интегралу, два раза формулу интегрирования по частям. При этом легко можно получить справедливость равенства

$$\int_0^l c_1(x) a(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = c_1(x) a(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=l} - (c_1(x) a(x))' u(x,t) \Big|_{x=0}^{x=l} + a_1 \mu_1(t).$$

С учетом этого равенства, равенство (5) можем переписать в виде

$$c_1(x) a(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=l} - (c_1(x) a(x))' u(x,t) \Big|_{x=0}^{x=l} = \mu_1''(t) - (a_1 + b) \mu_1(t) - \int_0^l c_1(x) f(x,t) dx.$$

Используя второе интегральное условие и второе условие в (4), аналогичным образом получим справедливость равенства

$$c_2(x) a(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=l} - (c_2(x) a(x))' u(x,t) \Big|_{x=0}^{x=l} = \mu_2''(t) - (a_2 + b) \mu_2(t) - \int_0^l c_2(x) f(x,t) dx.$$

Таким образом, интегральные условия (2), с учетом условий (4) заменили нелокальными граничными условиями

$$\begin{cases} d_1(l) \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} - d_1(0) \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + d_1'(0) u(0,t) - d_1'(l) u(l,t) = v_1(t), \\ d_2(l) \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} - d_2(0) \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - d_2'(0) u(0,t) - d_2'(l) u(l,t) = v_2(t), \end{cases}$$

(6)

где

$$d_k(x) = c_k(x)a(x), \quad v_k(x) = \mu_k''(t) - (a_k + b)\mu_k(t) - \int_0^l c_k(x)f(x,t)dx, \quad k = 1, 2.$$

Если исключить из этих двух граничных условий, сначала $\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}$, затем $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}$,

то получим следующие нелокальные граничные условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \gamma_0 u(0,t) + \gamma_1 u(l,t) &= \omega_1(t), \\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \delta_0 u(0,t) + \delta_1 u(l,t) &= \omega_2(t), \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{d_1'(0) \cdot d_2(l) - d_2'(0) \cdot d_1(l)}{d_1(l)d_2(0) - d_2(l)d_1(0)}, & \gamma_1 &= \frac{d_1(l) \cdot d_2'(l) - d_2(l) \cdot d_1'(l)}{d_1(l)d_2(0) - d_2(l)d_1(0)}, \\ \delta_0 &= \frac{d_1'(0) \cdot d_2(0) - d_2'(0) \cdot d_1(0)}{d_1(l)d_2(0) - d_2(l)d_1(0)}, & \delta_1 &= \frac{d_1(0) \cdot d_2'(0) - d_2(0) \cdot d_1'(0)}{d_1(l)d_2(0) - d_2(l)d_1(0)}, \\ \omega_1(t) &= \frac{d_2(l)v_1(t) - d_1(l)v_2(t)}{d_1(l)d_2(0) - d_2(l)d_1(0)}, & \omega_2(t) &= \frac{d_2(0) \cdot v_1(t) - d_1(0) \cdot v_2(t)}{d_1(l)d_2(0) - d_2(l)d_1(0)}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы задачу с интегральными условиями (1) - (4) заменили эквивалентной ей с нелокальными граничными условиями задачей (1), (7), (3).

3. Аппроксимация задачи (1), (7), (3)

В замкнутой прямоугольной области $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$, сначала определим сеточную область. Пусть $N \geq 2, j_0 \geq 2$ – фиксированные натуральные числа. Отрезок $[0, l]$ оси Ox разделим на N , отрезок $[0, T]$ оси Ot на j_0 равных частей и точки деления обозначим через $x_n = nh, n = 0, 1, 2, \dots, N$, и $t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots, j_0$, соответственно. Здесь $h = l/N, \tau = T/j_0$ Определим в области \bar{D} сетку

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_n, t_j), n = 0, 1, 2, \dots, N, j = 0, 1, 2, \dots, j_0\}.$$

Рассмотрим уравнение (1) в узлах $(x_n, t_j), n = 1, 2, \dots, N-1, j = 1, 2, \dots, j_0-1$, сетки $\bar{\omega}_{h\tau}$:

$$\frac{\partial^2 u(x_n, t_j)}{\partial t^2} = a(x_n) \frac{\partial^2 u(x_n, t_j)}{\partial x^2} + bu(x_n, t_j) + f(x_n, t_j). \quad (8)$$

Известно, что, если функция $u = u(x, t)$ имеет в области $D = \{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ ограниченные частные производные до четвертого порядка по каждой из переменных x и t , то справедливы равенства

$$\frac{\partial^2 u(x_n, t_j)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{n+1}, t_j) - 2u(x_n, t_j) + u(x_{n-1}, t_j))}{h^2} + O(h^2),$$

$$\frac{\partial^2 u(x_n, t_j)}{\partial t^2} = \frac{u(x_n, t_{j+1}) - 2u(x_n, t_j) + u(x_n, t_{j-1}))}{\tau^2} + O(\tau^2), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, j = 1, 2, \dots, j_0-1.$$

С учетом этих равенств, из равенства (8) получим справедливость равенств

$$\begin{aligned} \frac{u(x_{n+1}, t_{j+1}) - 2u(x_n, t_j) + u(x_{n-1}, t_{j-1}))}{\tau^2} &= a(x_n) \frac{u(x_{n+1}, t_j) - 2u(x_n, t_j) + u(x_{n-1}, t_j)}{h^2} + \\ &+ bu(x_n, t_j) + f(x_n, t_j) + O(h^2 + \tau^2), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, j = 1, 2, \dots, j_0-1. \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь разложим функцию $u = u(x, t_j)$, по формуле Тейлора в окрестности точки $(0, t_j)$:

$$u(x, t_j) = u(0, t_j) + x \frac{\partial u(0, t_j)}{\partial x} + \frac{x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(0, t_j)}{\partial x^2} + \frac{x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(\tilde{x}, t_j)}{\partial x^3}, \quad 0 < \tilde{x} < x.$$

При $x = h$ это равенство принимает вид

$$u(h, t_j) = u(0, t_j) + h \frac{\partial u(0, t_j)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u(0, t_j)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u(\tilde{x}, t_j)}{\partial x^3}, \quad 0 < \tilde{x} < h.$$

Предположим, что уравнение (1) выполняется и на границе $x = 0$ области \bar{D} . Тогда с учетом уравнения (1) и первого граничного условия в (7), из последнего равенства, после элементарных преобразований, получим справедливость равенства:

$$\begin{aligned} & \frac{h}{2a(0)} \frac{\partial^2 u(0, t_j)}{\partial t^2} - \left(\gamma_0 + \frac{bh}{2a(0)} \right) u(0, t_j) - \frac{u(h, t_j) - u(0, t_j)}{h} - \gamma_1 u(l, t_j) = \\ & = \frac{h}{2a(0)} f(0, t_j) - \omega_1(t_j) + O(h^2), \quad j = 1, 2, \dots, j_0 - 1. \end{aligned}$$

Аналогичным образом при $x = l$ области \bar{D} , получим:

$$\begin{aligned} & \frac{h}{2a(l)} \frac{\partial^2 u(l, t_j)}{\partial t^2} + \left(\delta_1 + \frac{bh}{2a(l)} \right) u(l, t_j) + \frac{u(l, t_j) - u(l-h, t_j)}{h} + \delta_0 u(0, t_j) = \\ & = \frac{h}{2a(l)} f(l, t_j) + \omega_2(t_j) + O(h^2), \quad j = 1, 2, \dots, j_0 - 1. \end{aligned}$$

Заменив в последних двух равенствах частные производные второго порядка по t , с соответствующими разностными выражениями, получим справедливость следующих равенств:

$$\begin{aligned} & \frac{h}{2a(0)} \frac{u(0, t_{j+1}) - 2u(0, t_j) + u(0, t_{j-1}))}{\tau^2} - \left(\gamma_0 + \frac{bh}{2a(0)} \right) u(0, t_j) - \frac{u(h, t_j) - u(0, t_j)}{h} - \\ & - \gamma_1 u(l, t_j) = \frac{h}{2a(0)} f(0, t_j) - \omega_1(t_j) + O(h^2 + \tau^2), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h}{2a(l)} \frac{u(l, t_{j+1}) - 2u(l, t_j) + u(l, t_{j-1}))}{\tau^2} + \left(\delta_1 + \frac{bh}{2a(l)} \right) u(l, t_j) + \frac{u(l, t_j) - u(l-h, t_j)}{h} + \\ & + \delta_0 u(0, t_j) = \frac{h}{2a(l)} f(l, t_j) + \omega_2(t_j) + O(h^2 + \tau^2), \quad j = 1, 2, \dots, j_0 - 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Из начальных условий (3) имеем:

$$u(x_n, 0) = \varphi_1(x_n), \quad u(x_n, \tau) = \bar{\varphi}_2(x_n) + O(\tau^3), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (12)$$

где

$$\bar{\varphi}_2(x_n) = \varphi_1(x_n) + \tau \varphi_2(x_n) + \frac{\tau^2}{2} (a(x_n) \varphi_1''(x_n) + b \varphi_1(x_n) + f(x_n, 0)).$$

Отбрасывая в равенствах (10)-(11) слагаемые порядка $O(h^2 + \tau^2)$ и в равенстве (12) слагаемое порядка $O(\tau^3)$ и обозначив при этом приближенное значение $u(x_n, t_j)$ через y_n^j ,

получим следующую разностную задачу, аппроксимирующую задачу (1), (7), (3) с точностью $O(h^2 + \tau^2)$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{h}{2a(0)} \frac{y_0^{j+1} - 2y_0^j + y_0^{j-1}}{\tau^2} - \left(\gamma_0 + \frac{bh}{2a(0)} \right) y_0^j - \frac{y_1^j - y_0^j}{h} - \gamma_1 y_N^j = f_0^j, \\
 & \frac{y_n^{j+1} - 2y_n^j + y_n^{j-1}}{\tau^2} - a(x_n) \frac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2} - by_n^j = f_n^j, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\
 (13) \quad & \frac{h}{2a(l)} \frac{y_N^{j+1} - 2y_N^j + y_N^{j-1}}{\tau^2} + \delta_0 y_0^j + \frac{y_N^j - y_{N-1}^j}{h} + \left(\delta_1 + \frac{bh}{2a(l)} \right) y_N^j = f_N^j, \quad j = 1, 2, \dots, j_0 - 1, \\
 & y_n^0 = \varphi_1(x_n), \quad y_n^1 = \bar{\varphi}_2(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 f_0^j &= \frac{h}{2a(0)} f(0, t_j) - \omega_1(t_j), \quad f_n^j = f(x_n, t_j), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad f_N^j = \frac{h}{2a(l)} f(l, t_j) + \\
 & + \omega_2(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, j_0 - 1.
 \end{aligned}$$

Разностная задача (13)-(14) ест явная разностная задача, т.к. зная значения искомой функции на слоях $t = t_{j-1}$ и $t = t_j$, т.е. значения y_n^{j-1} и y_n^j , $n = 0, 1, \dots, N$, по явным формулам, полученным из (13), можно найти значения y_n^{j+1} , $n = 0, 1, \dots, N$. Но такая задача одновременно имеет следующий недостаток: для устойчивого нахождения значения решения y_n^{j+1} , $n = 0, 1, \dots, N$, через значения y_n^{j-1} и y_n^j , $n = 0, 1, \dots, N$, требуется выполнение некоторого соотношения между шагами h и τ сетки. Это соотношение налагает на шаг τ сетки такое ограничение, что число слоев $t = t_j$ сетки существенно возрастает. А это приводит к существенному увеличению алгебраических операций. Поэтому при решении прикладных задач используют, так называемые, неявные разностные задачи.

Используя явную разностную задачу (13)-(14) построим соответствующую неявную разностную задачу. Пусть σ – действительный параметр. Рассмотрим следующую разностную задачу, зависящую от параметра σ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{h}{2a(0)} \frac{y_0^{j+1} - 2y_0^j + y_0^{j-1}}{\tau^2} - \left(\gamma_0 + \frac{bh}{2a(0)} - \frac{1}{h} \right) (\sigma y_0^{j-1} + (1-2\sigma)y_0^j + \sigma y_0^{j+1}) - \\
 & - \frac{1}{h} (\sigma y_1^{j-1} + (1-2\sigma)y_1^j + \sigma y_1^{j+1}) - \gamma_1 (\sigma y_N^{j-1} + (1-2\sigma)y_N^j + \sigma y_N^{j+1}) = f_0^j, \\
 & \frac{y_n^{j+1} - 2y_n^j + y_n^{j-1}}{\tau^2} - a(x_n) \left(\sigma \frac{y_{n+1}^{j-1} - 2y_n^{j-1} + y_{n-1}^{j-1}}{h^2} + (1-2\sigma) \frac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2} + \right. \\
 & \left. \sigma \frac{y_{n+1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n-1}^{j+1}}{h^2} \right) - by_n^j = f_n^j, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \tag{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{h}{2a(l)} \frac{y_N^{j+1} - 2y_N^j + y_N^{j-1}}{\tau^2} + \delta_0 (\sigma y_0^{j-1} + (1-2\sigma)y_0^j + \sigma y_0^{j+1}) - \\
 & - \frac{1}{h} (\sigma y_{N-1}^{j-1} + (1-2\sigma)y_{N-1}^j + \sigma y_{N-1}^{j+1}) + \left(\delta_1 + \frac{bh}{2a(l)} + \frac{1}{h} \right) (\sigma y_N^{j-1} + (1-2\sigma)y_N^j + \sigma y_N^{j+1}) = f_N^j,
 \end{aligned}$$

$$j = 1, 2, \dots, j_0 - 1,$$

$$y_n^0 = \varphi_1(x_n), \quad y_n^1 = \bar{\varphi}_2(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N. \tag{16}$$

Следует отметить, что неявная разностная задача (15)-(16) при $\sigma = 0$ совпадает с явной разностной задачей (13), (14).

4. Решение разностной задачи (15)-(16)

Перепишем разностные уравнения (15) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{h}{2\tau^2 a(0)} - \frac{b\sigma h}{2a(0)} - \gamma_0 \sigma + \frac{\sigma}{h} \right] y_0^{j+1} - \frac{\sigma}{h} y_1^{j+1} - \gamma_1 \sigma y_N^{j+1} - \left[\frac{h}{\tau^2 a(0)} + (1-2\sigma) \times \right. \\ & \times \left. \left(\frac{bh}{2a(0)} + \gamma_0 - \frac{1}{h} \right) \right] y_0^j - \frac{1-2\sigma}{h} y_1^j - \gamma_1 (1-2\sigma) y_N^j + \left[\frac{h}{2\tau^2 a(0)} - \frac{b\sigma h}{2a(0)} - \gamma_0 \sigma + \frac{\sigma}{h} \right] y_0^{j-1} - \\ & - \frac{\sigma}{h} y_1^{j-1} - \gamma_1 \sigma y_N^{j-1} = f_0^j, \\ & - \frac{\sigma a(x_n)}{h^2} y_{n-1}^{j+1} + \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{2\sigma a(x_n)}{h^2} - b\sigma \right) y_n^{j+1} - \frac{\sigma a(x_n)}{h^2} y_{n+1}^{j+1} - (1-2\sigma) \frac{a(x_n)}{h^2} y_{n-1}^j - \\ & - \left(\frac{2}{\tau^2} - \frac{2a(x_n)}{h^2} (1-2\sigma) - b(1-2\sigma) \right) y_n^j - (1-2\sigma) \frac{a(x_n)}{h^2} y_{n+1}^j - \frac{\sigma a(x_n)}{h^2} y_{n-1}^{j-1} + \\ & + \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{2\sigma a(x_n)}{h^2} - b\sigma \right) y_n^{j-1} - \frac{\sigma a(x_n)}{h^2} y_{n+1}^{j-1} = f_n^j, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ & \delta_0 \sigma y_0^{j+1} - \frac{\sigma}{h} y_{N-1}^{j+1} + \left[\frac{h}{2\tau^2 a(l)} + \frac{b\sigma h}{2a(l)} + \delta_1 \sigma + \frac{\sigma}{h} \right] y_N^{j+1} + \delta_0 (1-2\sigma) y_0^j - \frac{1-2\sigma}{h} y_{N-1}^j - \\ & - \left[\frac{h}{\tau^2 a(l)} - (1-2\sigma) \left(\frac{bh}{2a(l)} + \delta_1 + \frac{1}{h} \right) \right] y_N^j + \delta_0 \sigma \cdot y_0^{j-1} - \frac{\sigma}{h} y_{N-1}^{j-1} + \left[\frac{h}{2\tau^2 a(l)} + \frac{b\sigma h}{2a(l)} + \right. \\ & \left. + \delta_1 \sigma + \frac{\sigma}{h} \right] y_N^{j-1} = f_N^j, \quad j = 1, 2, \dots, j_0 - 1. \end{aligned}$$

Эти разностные уравнения, используя простые обозначения, можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & c_0 y_0^{j+1} - d_0 y_1^{j+1} - e_0 y_N^{j+1} - p_0 y_0^j - q_0 y_1^j - r_0 y_N^j + c_0 y_0^{j-1} - d_0 y_1^{j-1} - e_0 y_N^{j-1} = f_0^j, \\ & -b_n y_{n-1}^{j+1} + c_n y_n^{j+1} - b_n y_{n+1}^{j+1} - p_n y_{n-1}^j - q_n y_n^j - p_n y_{n+1}^j - b_n y_{n-1}^{j-1} + c_n y_n^{j-1} - b_n y_{n+1}^{j-1} = f_n^j, \\ & \quad \quad \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ (17) \quad & e_N y_0^{j+1} - b_N y_{N-1}^{j+1} + c_N y_N^{j+1} + p_N y_0^j - q_N y_{N-1}^j - r_N y_N^j + e_N y_0^{j-1} - b_N y_{N-1}^{j-1} + c_N y_N^{j-1} = f_N^j, \\ & \quad \quad \quad j = 1, 2, \dots, j_0 - 1, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} & c_0 = \frac{h}{2\tau^2 a(0)} - \frac{b\sigma h}{2a(0)} - \gamma_0 \sigma + \frac{\sigma}{h}, \quad d_0 = \frac{\sigma}{h}, \quad e_0 = \gamma_1 \sigma, \quad p_0 = \frac{h}{\tau^2 a(0)} + (1-2\sigma) \times \\ & \times \left(\frac{bh}{2a(0)} + \gamma_0 - \frac{1}{h} \right), \quad q_0 = \frac{1-2\sigma}{h}, \quad r_0 = \gamma_1 (1-2\sigma), \quad b_n = \frac{\sigma a(x_n)}{h^2}, \quad c_n = \frac{1}{\tau^2} + \frac{2\sigma a(x_n)}{h^2} - b\sigma, \\ & p_n = (1-2\sigma) \frac{a(x_n)}{h^2}, \quad q_n = \frac{2}{\tau^2} - \frac{2a(x_n)}{h^2} (1-2\sigma) - b(1-2\sigma), \quad b_n = \frac{\sigma a(x_n)}{h^2}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ & e_N = \delta_0 \sigma, \quad b_N = \frac{\sigma}{h}, \quad c_N = \frac{h}{2\tau^2 a(l)} + \frac{b\sigma h}{2a(l)} + \delta_1 \sigma + \frac{\sigma}{h}, \quad p_N = \delta_0 (1-2\sigma), \quad q_N = \frac{1-2\sigma}{h}, \end{aligned}$$

$$r_N = \frac{h}{\tau^2 a(l)} - (1 - 2\sigma) \left(\frac{bh}{2a(l)} + \delta_1 + \frac{1}{h} \right), e_N = \delta_0 \sigma, b_N = \frac{\sigma}{h}, c_N = \frac{h}{2\tau^2 a(l)} + \frac{b\sigma h}{2a(l)} + \delta_1 \sigma + \frac{\sigma}{h}.$$

Мы должны найти решение уравнений (17), которое удовлетворяет начальным условиям (16). Для решения этой задачи начинаем с первого значения $j = 1$. При $j = 1$, с учетом начальных условий (16), из (17) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений – трехточечную разностную задачу относительно $y_0^2, y_1^2, \dots, y_N^2$:

$$\begin{cases} c_0 y_0^2 - d_0 y_1^2 - e_0 y_N^2 = g_0^2, \\ -b_n y_{n-1}^2 + c_n y_n^2 - b_n y_{n+1}^2 = g_n^2, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ e_N y_0^2 - b_N y_{N-1}^2 + c_N y_N^2 = g_N^2. \end{cases} \quad (18)$$

Согласно [2, с.90-93] решение этой разностной задачи можем искать в виде

$$y_n^2 = u_n^2 + y_0^2 v_n^2 + y_N^2 w_n^2, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (19)$$

Взяв в этих равенствах $n = 0$ и $n = N$, легко можем получить справедливость равенств

$$u_0^2 = 0, v_0^2 = 1, w_0^2 = 0, u_N^2 = 0, v_N^2 = 0, w_N^2 = 1. \quad (20)$$

Из первого и последнего уравнений в (18), с учетом равенств (19) получим:

$$\begin{cases} c_0 y_0^2 - d_0 (u_1^2 + y_0^2 v_1^2 + y_N^2 w_1^2) - e_0 y_N^2 = g_0^2, \\ e_N y_0^2 - b_N (u_{N-1}^2 + y_0^2 v_{N-1}^2 + y_N^2 w_{N-1}^2) + c_N y_N^2 = g_N^2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (c_0 - d_0 v_1^2) y_0^2 - (e_0 + d_0 w_1^2) y_N^2 = g_0^2 + d_0 u_1^2, \\ (e_N - b_N v_{N-1}^2) y_0^2 + (c_N - b_N w_{N-1}^2) y_N^2 = g_N^2 + b_N u_{N-1}^2. \end{cases}$$

(21)

Из уравнений в (18) при $n = 1, 2, \dots, N-1$, с учетом (19) получим:

$$\begin{aligned} & -b_n (u_{n-1}^2 + y_0^2 v_{n-1}^2 + y_N^2 w_{n-1}^2) + c_n (u_n^2 + y_0^2 v_n^2 + y_N^2 w_n^2) - \\ & -b_n (u_{n+1}^2 + y_0^2 v_{n+1}^2 + y_N^2 w_{n+1}^2) = g_n^2, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & (-b_n u_{n-1}^2 + c_n u_n^2 - b_n u_{n+1}^2) + y_0^2 (-b_n v_{n-1}^2 + c_n v_n^2 - b_n v_{n+1}^2) + \\ & + y_N^2 (-b_n w_{n-1}^2 + c_n w_n^2 - b_n w_{n+1}^2) = g_n^2, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

Эти равенства будут выполняться, если

$$\begin{aligned} & -b_n u_{n-1}^2 + c_n u_n^2 - b_n u_{n+1}^2 = g_n^2, \quad n = 1, 2, \dots, N-1; \\ & -b_n v_{n-1}^2 + c_n v_n^2 - b_n v_{n+1}^2 = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1; \\ & -b_n w_{n-1}^2 + c_n w_n^2 - b_n w_{n+1}^2 = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Пусть найдены решения этих трехточечных разностных уравнений, удовлетворяющих условиям (20). После нахождения решений этих трехточечных разностных уравнений, из системы алгебраических уравнений (21) легко можем найти y_0^2 и y_N^2 . Затем используя равенства (19) можно определить решение задачи (18) - $y_0^2, y_1^2, y_2^2, \dots, y_N^2$. После этого можно переходить к решению задачи для разностных уравнений (17) при $j = 2$. Решая аналогичным образом эту задачу можно определить $y_0^3, y_1^3, y_2^3, \dots, y_N^3$. Продолжив этот процесс до значения $j = j_0 - 1$, можно найти решение разностной задачи (17), (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ханкишиев З.Ф. О решении и устойчивости одной разностной задачи для линейного нагруженного дифференциального уравнения гиперболического типа. Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2023, №1, с.44-61.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. Москва, «Наука», 1978, 592 с.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.19335882>
UDC 53:37.016

DIDACTIC POSSIBILITIES OF GAME TECHNOLOGIES IN MASTERING ABSTRACT CONCEPTS IN OPTICS

NURLANOVA AIGERIM

Master's student of the educational program 7M01504 – «Physics»,
Abai Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

RYSTYGULOVA VENERA BOTABAEVNA

Candidate of physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
K. Kulazhanov Kazakh State Technical University, Astana, Kazakhstan

Annotation. *The article explores the didactic possibilities of using game technologies in mastering abstract concepts found in the optics section of the high school physics course. It is argued that the theoretical and model nature of optical phenomena complicates students' conceptual understanding. The study was conducted using a quasi-experimental method, comparing the learning outcomes of the experimental and control groups of 8th graders. The experimental group used interactive quizzes, virtual laboratories, simulations, and group game elements. The results of the pre-test and post-test showed that game-based learning increases the quality of education. Statistical analysis confirmed the significant difference between the groups. The survey results revealed an increase in students' learning motivation and cognitive activity. The results of the study show that game technologies are an effective pedagogical tool that reduces conceptual errors in optics and contributes to the systematic acquisition of knowledge.*

Keywords: *optics, game technologies, conceptual errors, conceptual understanding, gamification, physics teaching*

Introduction

In the modern education system, it is more important for students to consciously understand concepts than to mechanically master knowledge. The optics section occupies a special place in the subject of physics, but the abstract nature of the properties of light and optical phenomena poses difficulties for students.

In traditional teaching methods, students often remain as receivers of ready-made information, and their activity is low. This leads to a decrease in students' interest in the subject. To solve these problems, there is a need to introduce innovative pedagogical technologies into the teaching process. As many studies have shown, students often memorize formulas, but do not fully understand the nature of light and the causes and effects of optical phenomena. As a result, they can solve problems, but their ability to apply physical principles in new situations and visualize them remains weak. To reduce this problem, it has been shown that not only formulas, but also conceptual understanding and program-oriented activities are important in teaching [1]. The Spectro-Uno card game developed by Sardinola and colleagues significantly improved students' conceptual understanding of the topic of light [2]. A. Vondmagegn, M. Mengesha, and F. Eshetu in their works consider the difficulties in teaching the topic of geometric optics in physics. The authors emphasize that traditional teaching methods cannot fully form students' conceptual understanding. To address this issue, online platforms, virtual labs, and traditional classroom learning have been integrated into a single system. Research findings have shown that not only do they deepen students' theoretical understanding, but they also increase their interest in the subject [3]. Tolentino and colleagues developed a strategic intervention material based on the game «Light Wars». The study used game-based learning technology to increase students' interest and ensure active participation. The game was designed as a hybrid card and board game format and was developed based on the ADDIE model. Research findings

have shown that the game «Light Wars» increased students' conceptual understanding of interference and diffraction [4].

Thus, gamified learning has a number of advantages. First, the introduction of game elements, such as points and badges, into the learning process has been proven to be an effective way to make learning more interesting. Game mechanisms act as learning rewards, offering students visible signs of their achievements and successes. Such an approach increases the motivation not only to better master the learning material, but also to apply the acquired knowledge in real life situations [5]. The second important aspect of gamification is its contribution to the development of team spirit and collective success. It is carried out by encouraging friendly competition, which not only emphasizes individual achievements, but also contributes to the overall progress of the team towards its goals [6]. The third aspect of gamification is its incentive to develop innovative and creative abilities, while the fourth important aspect is to significantly strengthen the process of effective organization of feedback and analysis of the effectiveness of students' learning activities. When students score low points, this serves as a clear signal that they are opening the door to improvement and development. A game-like environment allows for tracking progress and identifying areas that require additional work, which in turn contributes to improving student skills [7].

Materials and methods

The choice of the section «Optics» as an object of study in the physics course has its own methodological significance. Optics, while being one of the fundamental branches of physics, is a section that is very abstract in content, full of complex theoretical concepts, and poses certain difficulties for students to perceive.

Explaining topics such as light propagation, reflection and refraction, lens properties, and the principles of operation of modern optical instruments through innovative game technologies rather than traditional reproducible methods is an effective way to simplify complex material. This approach allows students to experience theoretical knowledge visually and practically, and to retain the material in their long-term memory.

In order to form a system of fundamental knowledge for students in the optics department, it is first necessary to study its structural classification (Figure 1):

1. Geometric optics. This section studies the laws of rectilinear propagation of light in homogeneous transparent media, without taking into account the wave and quantum nature of light. The main attention is paid to the geometric models of light rays, the laws of reflection and refraction, as well as the principles of image formation in optical systems.

2. Wave optics. Here, light is considered as an electromagnetic wave. The section studies fundamental phenomena in which the wave properties of light are clearly observed:

- **Interference** (superposition of waves);
- **Diffraction** (going around obstacles);
- **Polarization** (regulation of the direction of oscillation);
- **Dispersion** (the decomposition of light into a spectrum).

3. Quantum optics. A section that studies the propagation of light and the processes of its interaction with matter (photoelectric effect, luminescence, etc.) from the perspective of a flow of photons (light quanta). At this stage, students develop a modern physical understanding of the duality of light (particle-wave duality).

Systematic teaching of these three structural divisions of optics increases students' cognitive activity and provides the basis for a deep understanding of physical phenomena.

Structural Divisions of Optics

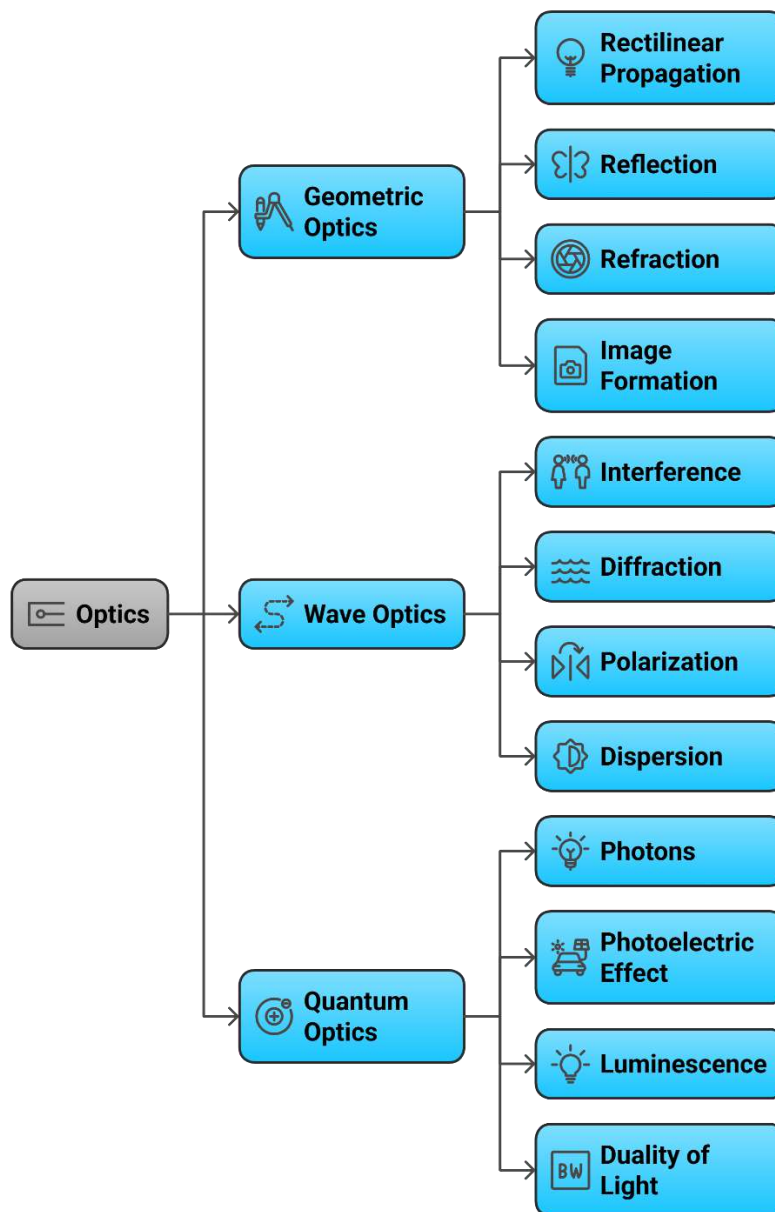


Figure 1. Structural classification of the optics department

Conceptual understanding is the ability of a student to understand physical laws and apply them in different situations. Perkins describes conceptual understanding as the ability to perform various cognitive actions related to a concept, namely, the ability to explain, apply, and transfer knowledge to new situations [8].

The acquisition of scientific concepts occurs at three levels: macroscopic, submicroscopic, and symbolic. The weak connection between these levels limits students' conceptual understanding [9]. This problem is especially evident in the optics section, where students have difficulty relating visually observed phenomena to physical models and formulas of light. In this context, the use of game technologies can connect these levels and allow students to understand optical concepts in a meaningful way.

Figure 2 shows the formation of conceptual understanding through gaming technologies.

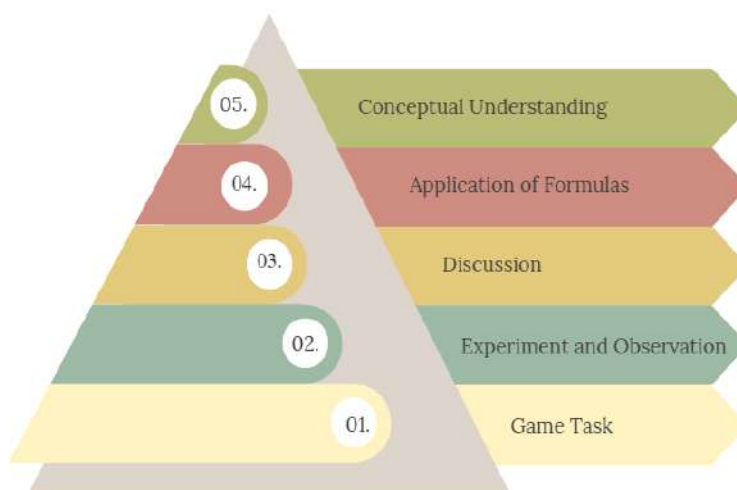


Figure 2. Formation of a conceptual understanding

Many studies have shown that the introduction of game technologies into the learning process increases students' conceptual understanding, motivation for learning, and activity [10]. The study was conducted using a quasi-experimental method. Two parallel classes of 8th grade students participated in the experiment. In the experimental group, the section of physics «Optics» was taught using game technologies, while in the control group, traditional teaching methods were used. The following methods were used in the study:

- preliminary test (pre-test);
- final test (post-test);
- survey;
- control;
- statistical analysis.

Game elements used in the experimental group: interactive quizzes; virtual laboratories; simulations (PhET); group competitions; role-playing games.

In the lesson structure, game elements were introduced at the following stages:

1. **The period of curiosity** – Draw students' attention to the lesson through the game «Who is faster?»;

2. **The period of learning a new lesson** – performing practical tasks through simulations;

3. **Approval period** – solving problems in a game format;

4. **Conclusion period** – Systematize knowledge through the game «Saykestender»;

5. **Reflection period** – students' self-assessment.

The control group used traditional methods: teacher explanations, working with a textbook, and problem solving.

Results and discussions

The results of the study showed that there were significant positive changes in the experimental group. According to the pre-test results, the initial level of both groups was similar. However, in the post-test results, the average score of the experimental group increased significantly, as shown in Table 1.

Table 1. Pre-test / post-test results (15 points)

Group	Pre-test	Post-test	Difference
Experimental	7.8	13.4	5.6
Control	8.1	9.6	1.5

The results of statistical analysis (Mann–Whitney test) showed that the difference between the experimental and control groups was statistically significant. According to the table, the critical value of the U-criterion was equal to 64. Since the obtained empirical value is less than this critical value, the null hypothesis (H0) is rejected. Therefore, the alternative hypothesis (H1) is accepted. In other words, we conclude that the use of gaming technologies has a more positive effect on the quality of students' education than traditional teaching methods.

The survey results also showed that students rated learning through games positively. Students noted that the lessons were interesting, that the games helped them understand, and that they were more engaged (Table 2).

Table 2. Survey results (average score)

Indicator	Average score (out of 5)
The lesson was interesting.	4.6
Games helped to understand	4.7
I understood the topic well.	4.5
I was active.	4.4

Conclusion

The effect of using game technologies in teaching the optics section of physics on students' conceptual understanding, learning motivation, and cognitive activity was experimentally studied. The effectiveness of game-based learning was proven by analyzing the results of the pre-test, final test, and questionnaire. The results of the study showed that lessons based on game technologies in the experimental group contributed to significantly higher results in comparison with the initial level of knowledge of students. When comparing the results of the pre-test and post-test, it was found that the level of knowledge of students in the experimental group on the propagation of light, reflection, refraction, and properties of lenses significantly increased. In the control group, no such significant increase was observed. Statistical analysis (Mann-Whitney U-test and Z-statistic) also confirmed that this difference was statistically significant ($p = 0.007 < 0.05$). This proves that gaming technologies can be an effective tool in the learning process.

In conclusion, game technologies are an important didactic tool in mastering abstract concepts in the optics department. Therefore, the systematic use of game technologies in teaching physics is an effective way to improve the quality of education.

REFERENCES

1. Çepni, S., & Ormanç, Ü. (2020). Investigating students' conceptual understanding of Newton's laws through STEM activities. *Journal of Turkish Science Education*, 17(2), 174–190.
2. Sardinola, CFC, Malayao Jr., SO, Paylaga, GJ, Sayson, NLB, Arogancia, DC, & Caparoso, JKV (2025). «Spectro-Uno»: Development and evaluation of a card game material in learning light for Grade 8 students. *International Journal of Research and Innovation in Social Science*, IX(III), 4537–4546. <https://doi.org/10.47772/IJRIS.2025.90300363>
3. Wondmagegn, A., Mengesha, M., & Eshetu, F. (Year not specified). Blended learning and geometrical optics: Examining its effectiveness in physics education.
4. Tolentino, NJA, Balarido, JFB, Nayve, MC, & Lawsin, NLP (2024). Light Wars: An interactive game-based strategic intervention material towards a better understanding of interference and diffraction in senior high school. *Journal of Innovative Research*, 2(1), 13–19. <https://doi.org/10.54536/jir.v2i1.2163>
5. Zourmpakis, AI, Kalogiannakis, M., et al. (2023). Adaptive gamification in science education: An analysis of the impact of implementation and adapted game elements on students' motivation. *Computers*, 12(7), 143. <https://www.mdpi.com/2073-431X/12/7/143>
6. Piterskikh, A., & Akulov, SA (2017). Gamification as a method of forming effective teams. In *Proceedings of the International Scientific and Practical Conference «Ural Mining School for the Regions»* (pp. 770–771). Yekaterinburg. <https://cyberleninka.ru/article/n/geymifikatsiya-kak-sposob-formirovaniya-leksicheskikh-navykov-govoreniya-na-uroke-inostrannogo-yazyka-v-obscheobrazovatelnoy-shkole/viewer>
7. Shirokolobova, AG (2022). Gamification in the context of digital transformation of education. *Bulletin of Samara State Technical University*, 19(1), 5–20. <https://cyberleninka.ru/article/n/geymifikatsiya-v-usloviyah-tsifrovoy-transformatsii-obrazovaniya/viewer>
8. Perkins, D. (2003). Teaching for understanding. *Educational Leadership*.
9. Johnstone, AH (1991). Why is science difficult to learn? *Journal of Computer Assisted Learning*, 7, 75–83.
10. Wouters, P., van Nimwegen, C., van Oostendorp, H., & van der Spek, ED (2013). A meta-analysis of the cognitive and motivational effects of serious games. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 249–265.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.19335985>
UDC 372.853:004.9

METHODOLOGY AND EFFECTIVENESS OF INTEGRATED TEACHING OF COSMOLOGY ELEMENTS USING DIGITAL EDUCATIONAL RESOURCES IN THE SCHOOL PHYSICS COURSE

ORALBAY ZHANERKE SEITZHANOVNA

Master's student of the educational program 7M01504 – «Physics», Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan

RYSTYGULOVA VENERA BOTABAYEVNA

Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor, Kazakh University of Technology and Business named after K. Kulazhanov, Astana, Kazakhstan

Abstract: *This scientific article provides a comprehensive and detailed examination of the most effective modern methods for integrating complex elements of cosmology into the standard high school physics curriculum. The primary focus of the work is a profound analysis of their direct impact on the qualitative level of students' knowledge. In the course of the study, the pedagogical effectiveness of the practical application of such innovative digital tools as interactive simulations from the Stellarium and PhET platforms was analyzed in detail. Additionally, up-to-date, high-quality video materials provided by the world's leading space agencies, NASA and ESA, were introduced into the educational process, allowing for significant visualization of the studied material. The practical significance of the work is confirmed by the results of a large-scale pedagogical experiment successfully conducted among 11th-grade students at School-Lyceum in Almaty. The empirical data obtained during the study clearly confirmed a substantial increase in students' cognitive activity. The final indicators demonstrated a steady improvement in the academic performance of students by an average of 10–15%, which proves the feasibility of wide-scale implementation of digital educational resources in the modern school education system.*

Key words: *cosmology, digital educational resources, simulations, physics course, pedagogical experiment, STEM, interdisciplinary communication.*

Introduction

In the modern era of globalization, the education system is undergoing a process of transformation in accordance with the rapid development of science and technology. One of the main priorities of the educational policy of the Republic of Kazakhstan is to supplement the content of education with modern scientific achievements and to digitalize the learning process. In Article 5 of the Law of the Republic of Kazakhstan "On Education," the primary task of the education system is established as the creation of conditions for the intellectual and spiritual development of the individual. In this regard, the integration of cosmology elements into the school physics course not only deepens the fundamental scientific knowledge of students but also paves the way for their understanding of a holistic scientific picture of the world.

Cosmology is a fundamental branch of science that studies the origin, structure, and laws of the evolutionary development of the Universe. Its significance in the school curriculum is clearly outlined in the State Mandatory Standard of General Secondary Education (SMSGE) approved by the Ministry of Education of the Republic of Kazakhstan. According to the SMSGE requirements, scientific literacy demands that students possess the ability to perceive the world from a scientific perspective and understand scientific models and theories. Integrating cosmological concepts – such as the Big Bang, the red shift of galaxies, and the accelerated expansion of the Universe – into the physics course fosters the development of students' critical thinking and enables them to establish direct connections with modern science.

However, certain methodological contradictions and difficulties arise in teaching cosmology at the school level. Firstly, the immense scale and abstract nature of cosmic phenomena are complex for students to perceive. Secondly, the static texts and images found in traditional textbooks cannot fully depict the dynamic processes in the Universe, such as stellar evolution or the curvature of space-time. In this regard, as emphasized in the Concept for the Development of Education in the Republic of Kazakhstan until 2025, the implementation of STEM and STEAM approaches and the widespread use of digital educational resources (DER) have become an urgent necessity.

Digital educational resources – simulations, animations, interactive models, and virtual laboratories – allow complex scientific concepts to be delivered in a visual and accessible language. International research indicates that integrating visual and auditory information based on multimedia learning theory significantly improves students' memory and cognitive activity. Modeling cosmological phenomena in a digital format helps transform the student from a passive listener into an active researcher.

The study is grounded in Richard Mayer's Multimedia Learning Theory and the concepts of domestic scholars (Nurgalieva S.K., Zhanatbekova N.Zh.) regarding the application of digital technologies. International scientific works have proven the effectiveness of digital simulations and animations in teaching natural sciences. For instance, Rutten, van Joolingen, and van der Veen showed through a systematic review that computer simulations have a positive impact on the mastery of scientific concepts [2]. Meta-analysis results conducted by Hillmayr, Ziernwald, and colleagues have identified that digital tools significantly enhance student academic achievement in science and mathematics subjects [3]. Furthermore, Beksultan and colleague Zhaksibaeva demonstrated that the use of PhET simulations improves students' understanding of physical phenomena and strengthens their motivation for lessons [4].

Specific evidence regarding the effectiveness of digital planetariums and programs such as Stellarium in teaching astronomy is provided in the study by Bayimbetova, which states that the visualization of astronomical phenomena plays a crucial role in forming students' spatial understanding [5]. Furthermore, the latest UNESCO report recommends the use of technology in education as a primary tool for developing students' research abilities [6].

Materials and Methods

This research work was conducted at the Suyunbay Lyceum School No. 143, located in Almaty. Fifteen 11th-grade students from the natural sciences and mathematics direction were selected as the subjects of the study. The primary instructional material used in the learning process was the "Physics" textbook for the 11th grade, authored by N. A. Zakirova [7]. The "Cosmology" unit, covered in the final fourth quarter of this textbook, formed the main substantive basis of the research. This unit encompasses complex scientific topics such as the stellar world, the relationship between the Sun and the Earth, planetary systems of stars, the Galaxy and the discovery of other galaxies, the Big Bang theory, as well as the evolution of the Universe and the future prospects of space exploration.

Digital resources and methods used:

- Interactive simulations (Stellarium, PhET): Visualization of planetary motion and the universal law of gravitation.
- Visual materials: Video lessons based on NASA and ESA materials.
- Pedagogical experiment: The experimental group was taught using innovative digital methods, while the control group was taught using the traditional method.

In choosing the research methods, the works of both Kazakhstani and foreign scientists dedicated to the use of digital educational resources in teaching school physics were taken as a basis. Among them, particular attention was paid to research focused on visualization, multimedia learning, the use of digital platforms, and the enhancement of cognitive activity.

To expand on these foundations, the study first integrates the Methodology of using digital technologies in school physics [8] as proposed by Nurgalieva and Kangozhin, which provides a specific framework for technical subjects. This is further supported by the research of Khamzaeva

and Nurgali [9], whose work emphasizes the pedagogical potential of digital education and how these tools can be effectively embedded into modern teaching practices. The study also draws upon the findings of Seitova [10] regarding the use of multimedia resources in STEM education, alongside the specialized research into epistemic games and education [11] by Zhanatbekova and Mailybaeva. These insights are synthesized with Kenzhaliev’s [12] broader analysis of the role of digital educational resources in the modern classroom and the cognitive foundations of Richard Mayer’s Multimedia Learning theory [13], which serves as the overarching theoretical basis for our conclusions.

The scientific principles of the aforementioned scholars served as the methodological foundation for our study. For instance, Richard Mayer’s Multimedia Learning Theory facilitated effective material mastery by simultaneously engaging students’ visual and auditory channels. The concept of "epistemic games" by V. Seitova was integrated into the process of modeling and investigating cosmological phenomena. Furthermore, the practices proposed in the works of Kazakhstani scholars N. Zh. Zhanatbekova and G. S. Mailybaeva provided guidance for integrating digital simulations and multimedia tasks into the lesson structure.

Consequently, the research materials and methods were fully implemented during the pedagogical experiment, enabling a comprehensive evaluation of the effectiveness of digital educational resources.

Results and discussions

A survey was conducted among students to obtain the results of the experiment. This survey was structured based on five key criteria for determining student knowledge levels: interest in space, understanding of scientific terms, ability to present a model of the Universe, critical thinking, and recognition of interdisciplinary connections. These criteria allowed for a comprehensive assessment of the students’ mastery of cosmology. The survey results showed an increase in students’ interest in the subject, a deeper understanding of scientific concepts, and significant development in their thinking, analysis, and modeling abilities. Furthermore, it was observed that by recognizing interdisciplinary links, the students’ worldview expanded and a scientific outlook was formed. Figure 1 presents the results of the survey conducted according to these five main criteria in the form of a chart; the bar chart indicates that student knowledge levels increased within the range of 10–15%.

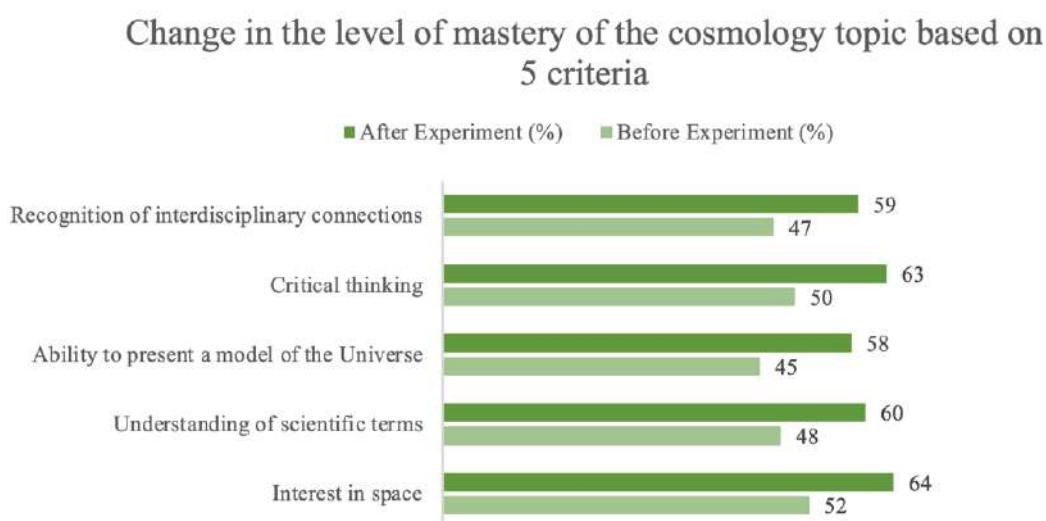


Figure 1 – Change in the level of mastery of the cosmology topic based on 5 criteria.

In Table 1, in order to present the data shown in the chart in a more precise and structured manner, the information is provided in the following tabular format.

Table 1. Criterial results on the topic of «Cosmology»

№	Criterion	Before (%)	Experiment	After Experiment (%)	Growth (%)
1	Interest in space		52	64	12
2	Understanding of scientific terms		48	60	12
3	Ability to present a model of the Universe		45	58	13
4	Critical thinking		50	63	13
5	Recognition of interdisciplinary connections		47	59	12

The effectiveness of the teaching methods used in the study is clearly reflected in the changes across the five main criteria presented in the chart and table.

As a result of comparing the initial and final levels, it was observed that student mastery across all criteria increased within the range of 10–15%. This growth proves the effectiveness of utilizing interactive, visual, and modeling methods in the educational process.

- The level of interest in space increased from 52% to 64%. This indicates that the use of video materials and simulations had a positive impact on capturing students' attention.
- Regarding the criteria for understanding scientific terms and the ability to present a model of the Universe, the growth was 12% and 13% respectively. This signifies that students' skills in the practical application of theoretical concepts have improved.
- Significant positive changes were also observed in the indicators for critical thinking and the recognition of interdisciplinary connections (with increases of 13% and 12%). This demonstrates the students' striving for a deep understanding of the topic and their ability to establish links with other subjects.

Thus, based on the data from the chart and table, it has been proven that integrated teaching of cosmology elements is an effective method that yields concrete results in increasing the scientific literacy and motivation of students. This approach demonstrates an update to teaching not only from a substantive but also from a methodological perspective.

At the beginning of the experiment, the level of student interest in cosmic topics was approximately 52%. This indicator reflected a superficial understanding of space among students and a lack of engaging visual content during lessons. To address this issue, video materials (NASA clips), fragments of documentaries, and interactive simulations (Stellarium, PhET) were utilized. As the visual and interactive nature of the lessons increased, so did student interest, ultimately reaching 64% by the conclusion of the study.

Furthermore, the level of understanding of scientific terms at the initial stage was 48%. This pointed to gaps in the students' thematic vocabulary and proved the necessity of specialized work with terminology. In this regard, activities involving a terminological dictionary were organized, and interactive presentations and schematic tasks were introduced. Students began applying new terms in specific contexts, which allowed their level of comprehension to increase to 60%.

Furthermore, the level of understanding of scientific terms at the initial stage was 48%. This indicated gaps in the students' thematic vocabulary and demonstrated the need for specialized work with terminology. In this regard, activities involving a terminological dictionary were organized during lessons, and interactive presentations and schematic tasks were introduced. Students began to apply new terms within specific contexts, which allowed their level of comprehension to increase to 60%.

Students' skills in presenting a model of the Universe were also at a low level at the beginning of the study (45%). Difficulties were observed in independently constructing simple models or

diagrams. To address this, activities such as the creative task "Describe the Universe Yourself," poster presentations, and group mapping were introduced. Additionally, students' visual thinking abilities were developed through the creation of thematic infographics. As a result, this indicator reached 58%, demonstrating an improvement in the students' model-based thinking skills.

In the assessment of critical thinking abilities, the initial level was also recorded at approximately 50%. Students struggled to provide reasoned answers to complex questions such as "Does the Universe have a limit?", "Where are we located?", and "Is other life possible?". To solve this problem, discussions (debates), "Can you prove it?" assignments, and exercises on providing arguments and counterarguments were conducted. As a result of this work, the students' critical thinking abilities improved to 63%.

The final criterion – the level of recognition of interdisciplinary connections – initially stood at 47%. Students were unable to fully grasp the links between natural sciences (physics, geography, biology) and humanities (literature, history). To address this, projects such as the literary and artistic integration project "Images of the Universe" and research assignments titled "Is Earth Unique in the Universe?" were implemented. These activities facilitated the students' recognition of logical connections between different subjects, resulting in the indicator rising to 59%.

Thus, the stable growth of indicators across all five criteria proved the effectiveness of the selected teaching methods and demonstrated that the integrated teaching of cosmology elements plays a vital role in expanding students' scientific worldview and increasing their interest in the subject.

Conclusion

As indicated by the research results, integrating cosmology elements into the school physics course is an effective method for forming students' scientific worldview, increasing their interest in the subject, and developing functional literacy. The modern methodologies utilized during the experimental work – video materials, interactive simulations, interdisciplinary assignments, and research elements – contributed to an increase in students' cognitive activity and facilitated the improvement of their independent thinking and scientific information analysis skills.

The results obtained across the five main criteria (interest in space, understanding of scientific terms, ability to present a model of the Universe, critical thinking, and recognition of interdisciplinary connections) showed a positive dynamic within the range of 10–15%, proving the effectiveness of the selected methods. These results fully align with the legislative requirements of the Republic of Kazakhstan in the field of education and modern educational trends, such as interdisciplinary integration, STEM approaches, and functional literacy.

In this regard, the systematic application of integrated cosmology elements in school physics instruction is recommended as an effective way to modernize educational content, enhance students' scientific potential, and deliver natural science subjects in an engaging and life-connected manner.

REFERENCES:

1. Law of the Republic of Kazakhstan "On Education". No. 319-III. July 27, 2007. – Astana: President of the Republic of Kazakhstan, 2007. – Electronic resource. – URL: <https://adilet.zan.kz/kaz/docs/Z070000319>.
2. Rutten N. P. G., van Joolingen W. R., van der Veen J. T. The learning effects of computer simulations in science education // *Computers & Education*. – 2012. – Vol. 58, No. 1. – P. 136–153. – <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.07.017>.
3. Hillmayr D., Ziernwald L., Reinhold F., Hofer S. I., Reiss K. M. The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: A context-specific meta-analysis // *Computers & Education*. – 2020. – Vol. 153. – 103897. – <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103897>.
4. Beksultan B. B., Zhaksibaeva M. Zh. Aspects of using digital technologies in general education schools // *Bulletin of KazNPU named after Abai. "Pedagogical Sciences" series*. – 2024. – No. 2 (82). – P. 342–352. – <https://doi.org/10.51889/2959-5762.2024.82.2.031>.

5. Bayimbetova Zh. Studying the potential of information and multimedia technologies in teaching physics in high schools of Kazakhstan // Eurasian Science Review. – 2022. – Vol. 2, No. 1. – P. 201–205. – <https://doi.org/10.63034/esr-28>.
6. UNESCO. Technology in education: A tool on the road to achieving quality learning for all. – Paris: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, 2021. – URL: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000375776>.
7. Zakirova N. A., Ashirov R. R. Physics Grade 11. Natural-mathematical direction. – Astana: Arman-PV, 2020. – 336 p..
8. Nurgalieva S. K., Kangozhin B. Cosmonauts of Kazakhstan. – Astana: Foliant, 2017. – 128 p. – ISBN 9786013026343.
9. Khamzaeva A., Nurgali U. Gamification: introducing elements of games in molecular physics // Endless light in science. Pedagogical sciences. – 2024. – No. 2. – P. 76–80. – DOI: 10.24412/2709-1201-2024-3107-76-80.
10. Seitova V. Innovative technologies in education: an example of implementation in Kazakhstan // Eurasian Science Review. – 2024. – Vol. 2, No. 3. – P. 187–200. – <https://doi.org/10.63034/esr-77>.
11. Zhanatbekova N. Zh., Mailybaeva G. S., Abdulaeva A. B. Problems of using information and communication technologies in education // Bulletin of KazNPU named after Abai. "Pedagogical Sciences" series. – 2022. – No. 2 (73). – P. 196–204. – <https://doi.org/10.51889/2022-1.1728-5496.20>.
12. Kenzhaliev D. I. Introductory chapters of astronomy: a textbook. – Almaty: Epigraph, 2019. – 256 p. – ISBN 9786012402469.
13. Mayer R. E. Multimedia Learning. – Santa Barbara: Cambridge University Press, 2009. – 450 p. – <https://doi.org/10.1017/9781316941355>.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.19336321>

ЭОЖ : 372.853

UDC: 372.853

ФИЗИКАНЫҢ ЭЛЕКТРОНИКА БӨЛІМІН ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ ӘДІСТЕРІН ҚОЛДАНА ОТЫРЫП ОҚЫТУ

АБДИРАМАНОВА К.Ш., АКТУРЕЕВА Г.

Ә.Қуатбеков атындағы Халықтар достығы университеті, Шымкент, Қазақстан

Кілт сөздер: жасанды интеллект, физикалық эксперимент, қолдану, болжау.

Keywords: artificial intelligence, physical experiment, application, prediction.

Технология дамыған сайын радиотехника әдістері оптикаға (сызықтық емес оптика), микротолқынды технологияға және электроникаға еніп, бұл саланы цифрландыру үшін өте маңызды әрекет етеді.

Спутниктік және мобильді тарату жүйелерінің технологиясы қазіргі уақытта бүкіл әлемде сапалық және сандық тұрғыдан жоғары даму деңгейіне жетті. Бүгінгі таңда мобильді сымсыз байланыс кез келген елдің телекоммуникациялық желісінің маңызды бөлігі болып табылады.

Бұл жұмыс барысында студенттер жабдық параметрлерін өлшеу және бағалау, сондай-ақ спутниктік және ұялы байланыс жүйелерін жобалау дағдыларын игеруі керек.

Радиотехника - электромагниттік тербелістер мен толқындар физикасына негізделген, сигналдарды генерациялауды, беруді, қабылдауды және өндеуді зерттейтін қолданбалы инженерлік пән. Ол радиофизикамен (орталықтағы толқындардың таралуын зерттеу) және электроникамен тығыз байланысты, қазіргі заманғы байланыс, радар және есептеу техникасының негізін құрайды.

Физика мен радиотехника арасындағы байланыстың негізгі аспектілері:

Негізгі негіз: Радиотехника электродинамикаға (Максвелл теңдеулеріне), жартылай өткізгіштер физикасына, кванттық электроникаға және тербеліс теориясына негізделген.

Жұмыс принциптері: Таратушы антенна электр сигналын кеңістікте таралатын және қабылдаушы антеннада ток тудыратын электромагниттік толқындарға айналдырады.

Байланысты салалар:

Радиофизика: Басқа құбылыстарды зерттеуге арналған радиожиілік әдістерін зерттейді (радиостамрономияда, радиоспектроскопияда).

Электроника: Энергия мен ақпаратты түрлендіру үшін электрондардың электромагниттік өрістермен өзара әрекеттесуі туралы ғылым.

Мамандықтары мен қолданылуы: Радиоинженерлері байланыс, навигация, радар, Заттар интернеті (IoT) және электрондық жабдық жүйелерін жобалайды және күтіп ұстайды.

Әдетте, физикалық құбылыстарды болжау және модельдеу суперкомпьютерлер мен физика заңдарына негізделген теңдеулерді қолдану арқылы жүзеге асырылады. Бұл теңдеулер өте жан-жақты болғанымен, бұл олардың жеке құбылыстардың жеке сипаттамаларын мінсіз қайталай алатынын білдірмейді. Мысалы, көптеген адамдар орта мектепте маятник қозғалысының физикасын оқиды. Нағыз маятник, мысалы, өндірістік ақауларға байланысты формулалармен сипатталған идеалды маятниктен ерекшеленеді. Ол теория бойынша қозғалмайды және бұл модельдеуді болжауда қателікке әкеледі. Үлкен табыстарынан кейін физикалық құбылыстар үшін арнайы жасалған нейрондық желілерге айтарлықтай назар аударылды.

Гамильтондық нейрондық желілер нейрондық желіде Гамильтондық жолды жүзеге асырады және осылайша физикада «энергияның сақталу заңын» қалыптастырады. Дегенмен, бұл дискретті уақытта мүмкін болмауы мүмкін, бұл көбінесе практикалық оқыту мен есептеулерде болады. Сонымен қатар, бұрынғы нейрондық желі модельдері басқа физикалық

зандарды ескермеген. Бұл зерттеуде біз белгілі бір дифференциалды-геометриялық құрылымды болжайтын энергияға негізделген терең физикалық модельдің принциптерін талдаймыз. Бұл құрылымнан энергияның сақталу заңы мен массаның сақталу заңы табиғи түрде пайда болады. Дискретті уақытта энергияға негізделген мінез-құлықты қамтамасыз ету үшін ғалымдар автоматты дискретті дифференциациялау алгоритмін ұсынады.

Ғалымдардың зерттеу тобы энергияның сақталу заңы сияқты физикалық заңдарды қатаң сақтай отырып, құбылыстарды болжау үшін пайдаланылуы мүмкін жаңа жасанды интеллектке негізделген технологияны әзірледі.

Бұл модель Гамильтон механикасы, Ландау теориясы және фазалық өрісті модельдеу сияқты жалпы физикалық құбылыстарға қолданылады. Оған позиция мен импульс (масса-серіппе жүйесі сияқты табиғи жүйе деп аталатын), үйкелісі бар табиғи жүйе, бос энергияны азайту арқылы алынған физикалық жүйе (мысалы, фазалық ауысулар) және Максвелл теңдеулері [2] сияқты Гамильтон теңдеулерінен тұратын Гамильтон жүйелері кіреді. Алдыңғы зерттеулердің көпшілігі арнайы жағдайларда алғашқы екі жүйенің біріне немесе сақталу заңдарын модельдеу үшін тым кең таралғанға бағытталған. Барлық теңдеулерді геометриялық теңдеулер ретінде жазуға болады. Осыған назар аударатын отырып, зерттеушілер оларды сандық есептеулерді қолдана отырып қайта жазды. Өз әдіснамасында алгоритмдер физикалық құбылыстардан бақыланатын деректерге негізделген энергия функциясын үйренеді, содан кейін сандық әлемдегі қозғалыс теңдеулерін жасайды.

Сонымен қатар, компьютерлік модельдеу үшін осы қозғалыс теңдеулерін қайта жазудың қажеті жоқ [1]. Мұны техникалық тұрғыдан жүзеге асыру үшін автоматты дифференциацияны қолдана отырып, машиналық оқытуда қолданылатын кері таралудың жаңа сандық нұсқасы жасалды. Бұл жаңа тәсіл сандық әлемде энергияның сақталу заңы сияқты физикалық заңдарды сақтауға мүмкіндік береді. Бұл жаңа әдістемені пайдалану өте сенімді болжамдар жасауға мүмкіндік береді және дәстүрлі модельдерде байқалатын энергияның табиғи емес өсуі мен азаюының алдын алуға көмектеседі. Симплектикалық геометрия және Риман геометриясы [4] сияқты геометриялық тәсілдер де сандық әлемге физикалық заңдарды енгізу үшін қолданылады. Бұл әдісті кең ауқымды құбылыстарды болжауға қолдануға мүмкіндік береді. Мысалы, екі тамшының бірігіп кету құбылысын олар бір тамшыға айналған кезде пайда болатын энергия шығынымен түсіндіруге болады.

Осы әдісті енгізу арқылы осы зерттеуде жасалған модель энергияның шашыраңқы құбылыстарын ескере отырып кеңейтілді, бұл энергия шығынын дәл бағалауға мүмкіндік береді. Оларға, мысалы, материалдардың құрылымдық ұйымдастырылуы, кристалдардың өсуі және жарықшақтардың таралу механикасы жатады. Физикалық құбылыстарды болжау алгоритмі болып табылатын Мелвин алгоритмі кванттық механиканың тұжырымдамалық негіздерін жаңаша зерттеуге мүмкіндік береді.

Білім беру жүйесі ХХІ ғасырда күрделі трансформациядан өтуде. Дәстүрлі оқыту әдістері әлі де маңызды, бірақ олар заманауи технологиялардың мүмкіндіктеріне сай толықтыруды қажет етеді. Бұл әсіресе жаратылыстану ғылымдарына қатысты. Физика пәні, әсіресе электроника бөлімі, оқушыларға қиындық тудыратын тақырыптар қатарына жатады, себебі бұл сала абстрактілі ұғымдарға және нақты тәжірибе жасауға негізделген.

Жасанды интеллект (Artificial Intelligence – AI) әдістерін сабаққа енгізу тек теорияны меңгеруге көмектеспейді, сонымен қатар оқушыларға виртуалды тәжірибе жасау, визуализацияны қарапайым түрде қабылдау және өз бетімен зерттеу жасау мүмкіндігін береді. AI құралдарын қолдану сабақтың интерактивті, көрнекі және практикалық деңгейде өтуіне мүмкіндік туғызады.

Физикадағы электроника мен AI әдістерін қолданудың маңызы

Электроника – бұл физика заңдылықтарының құрылғылар арқылы нақты қолданылуы. Мұнда транзистор, диод, интегралды схема сияқты элементтердің жұмыс принципін түсіну маңызды. Дәстүрлі сабақтарда мұны тек теориялық түрде түсіндіру оқушылар үшін қиын. Ал AI құралдары мына бағыттарда көмектеседі:

1. Теориялық білімді жеңілдету.

AI-чатботтар (ChatGPT, DeepSeek) күрделі процестерді қарапайым тілде түсіндіреді, формулаларды түсіндіріп береді және оқушының деңгейіне бейімделген сұрақ-жауап жүргізеді.

2. Визуализация.

AI құралдары арқылы электрондардың қозғалысын анимациялап көрсету, p-n өтпелер мен транзистордың жұмысын 3D модельде көрсету, ток сигналдарын графикалық түрде көрсету мүмкіндігі бар. Бұл оқушылардың көзбен көріп түсіну деңгейін арттырады.

3. Виртуалды зертханалар.

AI қолдайтын симуляторлар арқылы оқушылар физикалық тәжірибелерді қауіпсіз орындауға және схемаларды жинау, параметрлерді өзгерту, нәтижені талдау сияқты практикалық әрекеттерді жасауға мүмкіндік алады.

4. Жеке оқыту және бейімделу.

AI әр оқушының оқу деңгейін бағалап, бейімделген тапсырмалар мен қосымша түсіндірмелер ұсына алады. Бұл оқушылардың қызығушылығын арттырады және оқу процесін дербестендіреді.

Сабақ құрылымы

Физиканың электроника бөлімін AI әдістерімен өткізу 45 минуттық стандартты сабаққа бейімделген:

1-кезең: Ұйымдастыру және мотивация (5 минут)

• AI арқылы дайындалған қысқа бейнеролик көрсету. Мысалы, «Смартфон қалай жұмыс істейді?»

• Электрониканың күнделікті өмірдегі маңызын көрсету.

• Проблемалық сұрақтар қою: «Диод тоқты қалай бағыттайды?»

2-кезең: Жаңа тақырыпты түсіндіру (15 минут)

• AI презентацияларымен жұмыс (Slidesgo AI, Canva AI): тақырыпқа сәйкес визуалды слайдтар, анимациялар, графиктер.

• AI чат арқылы интерактивті сұрақ-жауап өткізу: әр оқушы сұрақ қоя алады, жауапты нақты контексте алады.

• Транзистор, диод схемаларын виртуалды 3D модельде көрсету.

• Формулалар мен олардың физикалық мағынасын AI арқылы талдау.

3-кезең: Практикалық жұмыс (15 минут)

• Виртуалды лабораторияда схема жинау: мысалы, транзисторлық күшейткіш немесе диодтық тізбек.

• Параметрлерді өзгертіп, нәтижелерді бақылау (ток, кернеу, кедергі).

• AI арқылы қателерді талдау және түзету ұсыныстарын алу.

4-кезең: Бекіту және бағалау (10 минут)

• AI бейімделген тесттерді қолдану: оқушының жауаптарына сәйкес сұрақтар мен тапсырмалар өзгереді.

• Әр оқушыға жеке кері байланыс беру.

• Нәтижелер бойынша қорытынды жасау.

Жобалық және зерттеу жұмыстары

Оқушыларға AI көмегімен жобалық жұмыстар орындау ұсынылады:

• «Ақылды жарықтандыру жүйесі»

• «Температураға сезімтал дабыл жүйесі»

• «Электрондық таймер немесе сигнализация»

AI құралдары жобаларды орындауда:

• Жоспар құруға,

• Электрондық схемаларды модельдеуге,

• Презентация жасауға,

• Веб-сайт немесе оқыту платформасын дайындауға

көмектеседі.

Бұл тәсіл оқушылардың зерттеу дағдыларын дамытуға және инженерлік ойлау қабілетін қалыптастыруға мүмкіндік береді.

Бағалау жүйесі

AI арқылы бағалау жүйесі бірнеше компоненттен тұрады:

1.Формативті бағалау: сабақ барысында AI құралдары арқылы оқушының прогресін бақылау.

2.Автоматты тест: әр оқушы деңгейіне бейімделген тест тапсыру.

3.Жобалық бағалау: критерий бойынша бағалау, презентация және виртуалды тәжірибенің нәтижесін есепке алу.

4.Кері байланыс: AI арқылы жеке ұсыныстар мен түзетулер беру.

Мұғалім мен оқушы үшін артықшылықтары

Мұғалім үшін:

- Сабаққа дайындалу уақыты қысқарады.
- Оқушылардың белсенділігін бақылау жеңілдейді.
- Оқыту процесінің тиімділігін нақты бағалауға мүмкіндік бар.

Оқушы үшін:

- Күрделі тақырыптарды оңай меңгеру.
- Практикалық дағды қалыптастыру.
- Инженерлік ойлау және зерттеу қабілеттерін дамыту.

Қауіпсіздік және этика

- AI құралдарын тек көмекші құрал ретінде пайдалану қажет.
- Оқушылардың жеке деректерін қорғау.
- Ақпараттың дұрыстығын тексеру, жалған немесе қате мәліметтердің алдын алу.

Болашаққа арналған перспективалар

AI әдістерін электроника сабақтарына енгізу тек білім беру процесін жеңілдетіп қана қоймай, оқушыларды инженерлік, IT және ғылыми салаға дайындауға мүмкіндік береді.

Болашақта:

- Виртуалды зертханалар нақты тәжірибелерді толық алмастыра алады.
- AI арқылы автоматты жобалық жұмыстар жасау кеңінен қолданылады.
- Оқу процесі дербестендіріліп, оқушының қызығушылығы максималды деңгейге жетеді.

Қорытынды

Физиканың электроника бөлімін жасанды интеллект әдістерін қолданып оқыту – заманауи, тиімді, қызықты және практикалық тұрғыдан пайдалы тәсіл. Бұл әдіс теорияны меңгеруге, тәжірибе жасауға және жобалық жұмыстар орындауға мүмкіндік береді. AI сабаққа енгізу арқылы мұғалімдер уақытты үнемдеп, оқытудың сапасын арттыра, ал оқушылар терең түсіну, практикалық дағдылар және инженерлік ойлау қабілетін дамыту мүмкіндігіне ие болады.

ӘДЕБИЕТТЕР

1. Battaglia, P., Pascanu, R., Lai, M., Rezende, D. J., and Kavukcuoglu, K. (2016). “Interaction networks for learning about objects, relations and physics,” in *Advances in Neural Information Processing Systems*, (Long Beach, CA), 4502–10.
2. Battaglia, P. W., Hamrick, J. B., Bapst, V., SanchezGonzalez, A., Zambaldi, V., Malinowski, M., et al. (2018). Relational inductive biases, deep learnin
3. Bishop, C. M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning*. New York, NY: Springer.
4. Champion, K., Zheng, P., Aravkin, A. Y., Brunton, S. L., and Kutz, J. N. (2019). A unified sparse optimization framework to learn parsimonious physics-informed models from data. arXiv 1906.10612.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.19336368>
УДК 666.942.82

ГАЗ ӨНДЕУ ҚАЛДЫҚТАРЫ НЕГІЗІНДЕГІ ЦЕМЕНТТІ ҰНТАҚТАУ ЖЕДЕЛДЕТКІШТЕРІНІҢ ЦЕМЕНТТІҢ ҚАТАЮЫ МЕН ҰСТАСУЫНА ӘСЕРІН ЗЕРТТЕУ

РИСТАВЛЕТОВ Р.А., КАМБАРОВ М.А., АУЕСБЕКОВА М.А.
М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті

Түйін. Бұл мақалада цементті ұнтақтау жеделдеткіштерін синтездеудің бүгінгі күнгі жағдайы талданып, цементті өндіру процесінің энергия тиімділігін арттыруға және цементтің физика-механикалық қасиеттерін жақсартуға мүмкіндік беретін ұнтақтау жеделдеткіштерін жергілікті газ өңдеу қалдықтары болып табылатын екіншілік диэтаноламиндер мен кілем өндірісі қалдықтары негізіне синтездеу мүмкіндігі мен қоспалардың цемент тасының беріктік жинау кинетикасы мен соңғы беріктігіне әсерін зерттеу нәтижелері көрсетілген. Талдау алканоламиндерге негізделген ұнтақтау жеделдеткіштерін синтездеу кезінде таңдалған шикізат диэтаноламин мен гидролизденген полиакрилонитрилдің полимерлі-химиялық түрленуі арқылы алуға болатынын және цемент үлгілеріне 10 грамм ұнтақтау жеделдеткіштерін қосу арқылы цемент тасының бастапқы және соңғы беріктігін арттыруға мүмкіндік беретінін көрсетті.

Кілтті сөздер: цемент, ұнтақтау жеделдеткіштері, газ өңдеу қалдықтары, метилдиэтаноламин, диэтаноламин, энергия тиімділік, беріктік.

Кіріспе

Қазіргі таңда өндірістік қалдықтарын тиімді басқару мәселесі әлемдік деңгейде өзекті болып отыр. Қалдықтарды бақылаусыз жинақтау экологиялық тепе-теңдіктің бұзылуына және табиғи ресурстардың сарқылуына алып келеді. Соңғы жүз жылдағы өнеркәсіп өндірісінің қарқынды дамуы бастапқы шикізатқа сұранысты арттырып қана қоймай, ірі көлемдегі қалдықтардың түзілуіне себеп болды. Өндіріс және тұтыну қалдықтарының ішінде басым бөлігін пайдалы қазбаларды өндіру қалдықтары құрайды (шамамен 92%), ал екінші орында өңдеу өнеркәсібі тұр.

Экологиялық тұрғыдан қауіпті салалардың бірі – мұнай және газ өнеркәсібі. Бұл салада қоршаған ортаға кері әсер ететін қалдықтар, соның ішінде аминдік ерітінділер (МДЭА, ДЭА) кең көлемде түзіледі. Сондықтан оларды қайта өңдеу және басқа өндіріс салаларында тиімді пайдалану тұрақты даму стратегиясының маңызды бағыты болып табылады.

Құрылыс материалдарын өндіруде энергия үнемдейтін технологияларды енгізу және қоршаған ортаны қорғау мәселелерін шешу қазіргі уақытта стратегиялық маңызды міндеттердің бірі. Бұл әсіресе цемент өнеркәсібі үшін өте маңызды, себебі цемент өндірісі көп мөлшерде энергия тұтынуды қажет етеді, соның ішінде клинкерді ұнтақтау процесіне зауыттағы жалпы энергия тұтынудың 45-50%-ы шығындалатыны белгілі. Сондықтан ұнтақтау процесін оңтайландыру өндіріс тиімділігін арттыру және шығындарды азайтуға мүмкіндік беретін өзекті мәселесі.

Осы мәселені шешудің тиімді тәсілі – ұнтақтау жеделдеткіштерін қолдану. Бұл қоспалар бөлшектердің жабысуын төмендетіп, дисперстілікті арттырады және диірмен өнімділігін жоғарылатады. Нәтижесінде энергия шығыны азайып, цементтің сапалық көрсеткіштері жақсарады [1-3].

Ұнтақтау жеделдеткіштері ретінде көбінесе алканоламиндер (диэтаноламин, триэтаноламин, триизопропаноламин), гликольдер (диэтиленгликоль, полиэтиленгликоль), сондай-ақ лигносульфонаттар, поликарбонаттар және полиакрилаттар қолданылады. Қоспалардың мөлшері әдетте цемент массасының 0,02–0,08% аспайды.

Ұнтақтау жеделдеткіштерінің әсері екі негізгі механизмге негізделген. Біріншісі – адсорбциялық әсер (П.А. Ребиндер эффектісі), яғни жаңа бет түзуге қажетті энергияның төмендеуі. Екіншісі – ұнтақтау барысында пайда болатын электр зарядтарын бейтараптандыру. Алканоламиндер мен полигликольдер жоғары дипольдік моментінің арқасында зарядтарды компенсациялап, бөлшектердің қайта бірігуіне кедергі жасайды. Ал ең тиімді жеделдеткіштер осы екі механизмді біріктіретін кешенді қоспалар болып табылады.

Минералдық қоспалары бар портландцементті ұнтақтау кезінде технологиялық қиындықтар туындайды. Әктас клинкерге қарағанда жеңіл ұнтақталатындықтан, оның шамадан тыс ұнтақталуы орын алуы мүмкін. Сонымен қатар, әктас бөлшектерінің бетінде электр зарядтарының концентрациясы жоғары болады, бұл процестің селективтілігін күрделендіреді. Сондықтан мұндай жүйелерде тиімді жеделдеткіштерді таңдау ерекше маңызды [4].

Ғылыми әдебиеттерді талдау әлемде цементті ұнтақтау проблемасына ерекше көңіл бөлінетінін көрсетеді. Мәселен Wang және әріптестері [5] триэтаноламин мен гликоль негізіндегі жеделдеткіштердің әсерін зерттеп, бұл қоспаларды қолдану ұнтақтау процесінің энергия шығынын 12-18% дейін төмендететінін анықтап, нәтижесінде цементтің меншікті беті артып, бастапқы беріктік көрсеткіштері жақсаратынын дәлелдеген. Украиналық зерттеушілер [6] полимер негізіндегі интенсификаторларды қолдану ұнтақтау процесінің кинетикасын жылдамдататып, диірмен өнімділігін арттыратынын дәлелдеген. Fernández және әріптестері [7] органикалық қышқылдар мен беттік белсенді заттар цемент бөлшектерінің беттік керілуін төмендетіп, беріктікті 8–13%-ға арттыратынын анықтаған. Кобуа тобы [8] синтездеген көпфункционалды жеделдеткіштер ұнтақтау процесінің энергия шығынын 15-25%-ға дейін төмендететінін, ал Assaad [9] зерттеулерінде поликарбонаттар ұнтақтау тиімділігін 18-22%-ға арттыратынын анықтаған. Ресейлік зерттеушілер [10] алканоламиндер мен полигликольдердің клинкер дисперстілігін арттырып, энергия шығынын 10-20%-ға төмендететінін, сонымен қатар, цементтің гидратация кинетикасын жақсартып, бастапқы беріктік жинауына оңтайлы әсер ететінін, ал жапон ғалымдары [11] беттік-белсенді заттар бөлшектердің беттік энергиясын төмендетіп, агломерацияны азайтатынын, сонымен бірге ұнтақтау уақытын қысқартып, энергия тиімділігін арттыруға мүмкіндік беретінін көрсеткен. Дегенмен Қазақстанда цементті ұнтақтау жеделдеткіштерін синтездеу бағытындағы зерттеулер жоқтың қасы.

Ғылыми әдебиеттерді талдау ұнтақтау жеделдеткіштерін синтездеуде бірнеше қосылыстар тобы кеңінен қолданылатынын көрсетті, соның ішінде беттік белсенді заттар, органикалық аминдер, полиолдар, олигомерлер және күрделі қоспалар [12, 13], бірақ олардың ішіндегі ең көп зерттелгендері - поликарбонат эфирі негіздегі жеделдеткіштер, бұл қоспалар цемент жүйелерінің жұмысқа қабілеттілігін жақсарту үшін клинкер диірмендерінде ұнтақтауға көмекші құрал ретінде кеңінен қолданылады [11-14]. Бұл зерттеулер поликарбонат эфирлерінің адсорбциялық жабындарды қалыптастыру арқылы цемент бөлшектерінің агломерациясын азайту арқылы ұнтақтау тиімділігін арттыра алатынын көрсетті. Сонымен қатар, мұндай полимерді қолдану цемент қамырының жылжымалылығын арттырып, сусұранысын төмендетуге мүмкіндік береді.

Материалдар мен зерттеу әдістері

Біз зерттеулерде цементті ұнтақтау жеделдеткіштерін синтездеу үшін шикізат ретінде қайта өңделген нитрил талшығы (ПАН, кілем өндірісінің қалдық өнімі), екінші реттік диэтаноламин (ДЭА) (PetroKazakhstan Oil Products LLC компаниясында газды өңдеуден қалған қалдық өнім), 8% натрий гидроксиді ерітіндісі, метанол және тұз қышқылын пайдаланыландық. Поликарбонат эфирлері нитрил топтарын гидролиздеу арқылы, яғни ПАН жоғары температура мен қысымда күшті сілтілермен өңдеу және этерификациялау арқылы синтезделді, алынған поликарбон қышқылы (немесе оның тұзы) қышқыл катализаторының қатысуымен диэтаноламинмен әрекеттестіріліп, эфир топтарын (поликарбонат эфирлері) түзеді.

ДЭА қалдықтарын аминдік құрылымының арқасында тиімді жеделдеткіш бола алатынын көрсетті. Бұл қосылыстар бөлшектер бетінде адсорбцияланып, электр зарядтарын бейтараптандырады және дисперстілікті арттырады.

Синтезделген жеделдеткіштерінің әсері «Стандартцемент» ЖШС М400 маркалы цементінде мемлекеттік стандарт талаптарына сәйкес зерттелді.

Нәтижелер және талдау

Алынған қоспаның цемент қамыры беріктігіне әсерін анықтау үшін тәжірибелік зерттеулер жүргіздік. Зерттеу нәтижесінде қоспалары бар цемент тасы үлгілерінің сығуға және иуге беріктігіне сынақтар жүргізілді. Ұнтақтау жеделдеткіштері негізіндегі үлгінің беріктігі бақылау үлгілерімен салыстырмалы (1-кесте) зерттелді.

Кесте 1 – Ұнтақтау жеделдеткіштері негізіндегі цемент тасының сығуға (а) және иуге (б) беріктігі

№	М400 портландцементі (г)	Су (мл)	Ұнтақтау жеделдеткіші (г)	Үлгілердің сығуға және иуге беріктігі					
				2 тәулік МПа		7 тәулік МПа		28 тәулік МПа	
				а	б	а	б	а	б
1	2	3	4	5		6		7	
2	1000	250	-	17,1	3,7	28,3	4,8	41,1	6,5
3	1000	225	5	22,3	4,1	33,2	5,1	45,9	6,6
4	1000	225	10	23,5	4,4	35,8	5,3	48,5	7,4
5	1000	225	20	22,7	4,6	37,9	5,1	48,9	7,6

1 кесте нәтижелерінен көрінгендей 5 грамм ұнтақтау жеделдеткіші бар цемент тасының сығуға беріктігі бақылау үлгісімен салыстырғанда 2 тәуліктік мерзімде 30,4%-ға, 7 тәуліктен кейін 17,3%-ға, ал 28 тәуліктен кейін 11,6%-ға жоғары болатыны анықталды. Үлгілердің иуге беріктігі 2 тәуліктен соң 10,8%-ға, 7 тәуліктен соң 6,25%-ға және 28 тәуліктен кейін 1,5%-ға жоғары болды. Ұнтақтау жеделдеткіші мөлшерін 10 г дейін арттырған кезде цемент тасының сығуға беріктігі сәйкесінше 2 тәуліктен кейін 37,4%-ға, 7 тәуліктен соң 26,5%-ға және 28 күннен кейін 18,0%-ға жоғары екені анықталды. Бұл үлгілердің иуге беріктігі 2 күннен кейін 18,9%-ға, 7 күннен кейін 10,4%-ға және 28 күннен кейін 13,8%-ға жоғары болды. Жеделдеткіш қоспаның мөлшерін 20 г дейін арттыру цемент тасы беріктігінің пропорционалды артуына ықпал етпейтінін көрсетеді. Бұл жеделдеткіш қоспалардың бетонның беріктігін арттыруда өте маңызды рөл атқаратынын, цемент араласпасының біріншілік және екіншілік гидратациясына белсенді қатысатынын көрсетеді.

Оларды қайта өңдеу өндірістік шығындарды төмендетіп қана қоймай, экологиялық жүктемені азайтады. Осылайша, қалдықтарды кәдеге жарату мен энергия үнемдеуді үйлестіретін кешенді шешім ұсынылады.

Қорытынды

- Әдеби шолу полиамидті полиэлектролиттерге негізделген ұнтақтау жеделдеткіштерін синтездеу кезінде таңдалған шикізат диэтанолламин мен гидролизденген полиакрилонитрилдің полимерлі-химиялық түрленуі арқылы алуға болатынын көрсетті.

- 10 грамм ұнтақтау жеделдеткіштерін қосу арқылы алынған цемент тасының сығуға беріктігі сәйкесінше 2 тәуліктен кейін 37,4%-ға, 7 тәуліктен соң 26,5%-ға және 28 күннен кейін 18,0%-ға жоғары болатынын, ал иуге беріктігі 2 күннен кейін 18,9%-ға, 7 күннен кейін 10,4%-ға және 28 күннен кейін 13,8%-ға жоғары болатынын көрсетті. Осылайша, 1000 грамм цементке 10 грамм химиялық қоспа қосу оңтайлы құрам болатынын көрсетті.

- Зерттеулер AP206102705 «Жергілікті шикізаттар негізінде цементті ұнтақтау жеделдеткіштерін әзрлеу және алу» гранттық қаржыландырылатын жоба күнтізбелік жоспарына сәйкес жүргізілді.

ӘДЕБИЕТТЕР

1. Мелентьева Е.Н. Обращение с отходами нефтегазодобывающей отрасли: состояние и перспективы / Е.Н. Мелентьева, А.В. Румянцева. — Текст: электронный // Система управления экологической безопасностью: сборник трудов XVII международной научно-практической конференции (Екатеринбург, 19-20 мая 2023 г.). - Екатеринбург: УрФУ, 2023. - С. 66-71.
2. Ходаков Г.С. Тонкое измельчение строительных материалов. - М.: Издательство литературы по строительству, 1972г.
3. Молчанов, Владимир Иннокентьевич. Активация минералов при измельчении / В.И. Молчанов, О.Г. Селезнева, Е.Н. Жирнов. - Москва: Недра, 1988
4. Tanaka I., Koishi M., Shinohara K. A study on the process for formation of spherical cement through an examination of the changes of powder properties and electrical charges of the cement and its constituent materials during surface modification // Cement and Concrete Research. – 2002. – Vol. 32. – P. 57–64.
5. Wang, J. F., Wang, D. M., Li, D. L., Tang, G. B., & Du, C. D. (2013). *The theoretical research on development direction of cement grinding aids*. Advanced Materials Research, 668, 269–273. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.668.269>
6. Poliuzhyn, I., Il'nyts'kyi, Z. M., Tsyupko, F. I., & Laruk, M.M. (2018). *Kinetics of grinding for cement clinker using new industrial grinding aids*. CTAS, 1(1), 12-20. <https://doi.org/10.23939/ctas2018.01.012>
7. Fernández, J. M., et al. (2020). *Effect of organic acids and surfactants as grinding aids on mechanical properties of cement particles*. Cement and Concrete Research, 134, 106050. <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2020.106050>
8. Kobya, V., Kaya, Y., Kuran, Ö., Kaya, Y., Mardani, A., & Ramyar, K. (2026). *An approach to modified grinding aid for green cement production: synthesis, characterization, and compatibility with cement*. Scientific Reports, 16, 4901. <https://doi.org/10.1038/s41598-026-35585-4>
9. Assaad, J., Kaya, Y., Şahin, H.G., & Mardani, N. (2024). *Influence of grinding aids on the grinding performance and rheological properties of cementitious systems*. Materials, 17(21), 5328. <https://doi.org/10.3390/ma17215328>
10. Гуляков Е.Г., Хозин В.Г., Боровских И.В., Ганеева Ю.М. Влияние суперпластификаторов на размолоспособность портландцемента при получении цементов низкой водопотребности // Известия КГАСУ, 2024, № 2(68), с. 77-91, DOI: 10.48612/NewsKSUAE/68.7, EDN: GINAGZ
11. Öner, M. (1986). *The effect of surface-active agents on the grinding of cement clinker*. Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University, 48(2), 103–118.
12. Черненко В.В. Интенсификаторы помола цементного клинкера // 2024, Том 7, №4 / 2024, Vol. 7, Iss. 4 ISSN 2619-0575 <https://cb-journal.ru> DOI: <https://10.58224/2619-0575-2024-7-4-13-24>
13. X. Gao, Y. Yang, H. Deng, Utilization of beet molasses as a grinding aid in blended cements, Constr. Build. Mater. 25 (2011) 3782–3789, <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2011.04.041>.
14. J. Plank, K. Pöllmann, N. Zouaoui, P.R. Andres, C. Schaefer, Synthesis and performance of methacrylic ester based polycarboxylate superplasticizers possessing hydroxyl terminated poly (ethylene glycol) side chains, Cem. Concr. Res. 38 (2008) 1210-1216, <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2008.01.007>.

СОДЕРЖАНИЕ CONTENT

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

CAVADOVA M.M., RƏSULOV RUZİ VAQİF OĞLU YÜKSƏK GƏRGİNLİKLİ VƏ YÜKSƏK TEZLİKLİ ELEKTRİK SOBALARINDA ENERJİ ÇEVRİLMƏ EFFEKTİVLİYİNİN VƏ ELEKTROMAQNİT PROSESLƏRİN MÜASİR İNNOVATİV TEXNOLOGİYALAR ƏSASINDA TƏDQIQI.....	3
ХАНКИШИЕВ ЗАКИР ФАРМАН ОГЛЫ, КЕРИМОВА АСЯ ХАБИЛ ГЫЗЫ [БАКУ, АЗЕРБАЙДЖАН] РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.....	7
ХАНКИШИЕВ ЗАКИР ФАРМАН ОГЛЫ, ИСАЕВ МИРВАХАБ РАМИН ОГЛЫ [БАКУ, АЗЕРБАЙДЖАН] РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ.....	14
NURLANOVA AIGERIM [ALMATY, KAZAKHSTAN], RYSTYGULOVA VENERA BOTABAEVNA [ASTANA, KAZAKHSTAN] DIDACTIC POSSIBILITIES OF GAME TECHNOLOGIES IN MASTERING ABSTRACT CONCEPTS IN OPTICS.....	22
ORALBAY ZHANERKE SEITZHANOVNA [ALMATY, KAZAKHSTAN], RYSTYGULOVA VENERA BOTABAYEVNA [ASTANA, KAZAKHSTAN] METHODOLOGY AND EFFECTIVENESS OF INTEGRATED TEACHING OF COSMOLOGY ELEMENTS USING DIGITAL EDUCATIONAL RESOURCES IN THE SCHOOL PHYSICS COURSE.....	28
АБДИРАМАНОВА К.Ш., АКТУРЕЕВА Г. [ШЫМКЕНТ, ҚАЗАҚСТАН] ФИЗИКАНЫҢ ЭЛЕКТРОНИКА БӨЛІМІН ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ ӘДІСТЕРІН ҚОЛДАНА ОТЫРЫП ОҚЫТУ.....	34
РИСТАВЛЕТОВ Р.А., КАМБАРОВ М.А., АУЕСБЕКОВА М.А. [ШЫМКЕНТ, ҚАЗАҚСТАН] ГАЗ ӨНДЕУ ҚАЛДЫҚТАРЫ НЕГІЗІНДЕГІ ЦЕМЕНТТІ ҰНТАҚТАУ ЖЕДЕЛДЕТКІШТЕРІНІҢ ЦЕМЕНТТІҢ ҚАТАЮЫ МЕН ҰСТАСУЫНА ӘСЕРІН ЗЕРТТЕУ.....	38



"IN THE WORLD OF SCIENCE AND EDUCATION"

Контакт

els.education23@mail.ru

Наш сайт

irc-els.com